இரு பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர் :

திரு. ஏ. கோவிந்தராஜுலு, M.Sc., B.Ed.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
சிக்கண்ணு அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
திருப்பூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

த. பா. நி. (க.வெ.) வரிசை எண் — 277

இரு பரிமாணப் பகுமுறை வடிவகணிதம்

(ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS)

(பட்டப்படிப்புக்குரியது)

ஆசிரியர் :
திரு. ஏ. கோவிந்தராஜுலு, M. Sc., B. Ed.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
சிக்கண்ணா அரசினர் கலைக் கல்லூரி,
திருப்பூர்.

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

First Edition—December, 1971

T.N.T.B.S. (C.P.) No. 277

© TAMIL NADU TEXT BOOK SOCIETY

ANALYTICAL GEOMETRY OF TWO DIMENSIONS, For B.Sc.

A. GOVINDARAJULU

Net Price Rs. 8-25

(No discount)

"Published by the Tamil Nadu Text Book Society under the Centrally Sponsored Scheme of Production of Books and literature in regional languages at the University level, of Government of India in the Ministry of Education and Social Welfare."

Printed by
Kumaran Press,
298, Mint Street,
Madras-1

அணிந்துரை

திரு. இரா. நெடுஞ்செழியன்
(தமிழகக் கல்வி—உள்ளாட்சித் துறை அமைச்சர்)

தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கிப் பதினோராண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வந்தனர். 1968ஆம் ஆண்டின் தொடக்கத்தில் புகுமுக வகுப்பிலும் (P.U.C.), 1969ஆம் ஆண்டிலிருந்து பட்டப்படிப்பு வகுப்புகளிலும் விஞ்ஞானப் பாடங்களையும் தமிழிலேயே கற்பிக்க ஏற்பாடு செய்துள்ளோம். தமிழிலேயே கற்பிப்போம் என முன்வந்துள்ள கல்லூரி ஆசிரியர்களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித் தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டுணர்ச்சி இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே மகிழ்ச்சியும் மன நிறைவும் தரத்தக்க வகையில் நடைபெற்று வருகிறது. இவ்வகையில், கல்லூரிப் பேராசிரியர்கள் கலை, அறிவியல் பாடங்களை மாணவர்க்குத் தமிழிலேயே பயிற்றுவிப்பதற்குத் தேவையான பயிற்சியைப் பெறுவதற்கு மதுரைப் பல்கலைக்கழகம் ஆண்டுதோறும் எடுத்துவரும் பெருமுயற்சியைக் குறிப்பிட்டுச் சொல்ல வேண்டும்.

பல துறைகளில் பணிபுரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், தத்துவம், புவியியல், கணிதம், பௌதிகம், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல் ஆகிய எல்லாத் துறைகளிலும் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இரு வகையிலும் தமிழ்நாட்டுப் பாட நூல் நிறுவனம் வெளியிட்டு வருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான ‘இரு பரிமாணப் பகு முறை வடிவ கணிதம்’ என்ற இந் நூல் தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனத்தின் 277ஆவது வெளியீடாகும். இதுவரை 312 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும்; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். தமிழ்நாட்டுப் பல்கலைக் கழகங்களின் பலவகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

இரா. நெடுஞ்செழியன்

பொருளடக்கம்

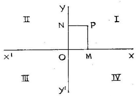
		பக்கம்
1.	அறிமுகம்	1
2.	நேர்க்கோடு	18
3.	இரட்டைக் கோடுகள்	48
4.	வட்டம்	81
5.	ஒருநிலை வட்டங்கள்	130
6.	பரவளைவு (Parabola)	166
7.	நீள்வட்டம்	224
8.	அதிபரவளைவு (Hyperbola)	313
9.	இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல் ...	386
10.	கோண தூரச் சமன்பாடுகள்	450
	கலைச் சொற்கள்	499

1. அறிமுகம்
(Introduction)

1·1. இயற்கணிதத்தைக் கொண்டு வடிவ கணிதத் தேற்றங்களை நிறுவும் ஒரு முறையே ஆயத் தொலை வடிவ கணிதமாகும். தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும் இரு கோடுகள் தளத்தை நான்கு பகுதிகளாகப் பிரிக்கும். ஒவ்வொரு பகுதியும் ஒரு காற்பகுதி (quadrant) எனப்படும். $X'OX$, $Y'OY$ என்பவை தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் கோடுகள் எனக் கொள்வோம். XOY, YOX', $X'OY'$, $Y'OX$ எனும் பகுதிகள் முறையே முதலாம், இரண்டாம், மூன்றும், நான்காம் காற்பகுதிகள் என்ப் படும்.

1·2. அச்சுத் தூரங்கள் (Coordinates)

$X'OX$ எனும் கோடு x ஆயமெனவும், $Y'OY$ எனும் கோடு y ஆயமெனவும் கூறப்படுகின்றன. இவை இரண்டும் சந்திக்கும் புள்ளி O ஆதி (origin) எனப்படும்.

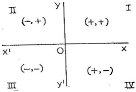


படம் 1.

ஆதியிலிருந்து x ஆயத்திற்கு இணையாக அளக்கப்படும் ஒரு புள்ளியின் தொலை x ஆயத்தொலை என்றும், அவ்வாறே y ஆயத்திற்கு இணையாக அளக்கப்படும் அதன் தொலை y ஆயத்தொலை என்றும் அழைக்கப்படுகின்றன.

தளத்தில் P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியை எடுத்துக் கொள்வோம். P புள்ளியிலிருந்து x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM என்ற கோட்டையும், y ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோட்டையும் வரையவும். OM, MP என்ற அளவுகளை நாம் அறிந்தால் P என்ற புள்ளியின் நிலையைத் தளத்தில் குறிக்கலாம். OM, MP என்ற இரண்டு அளவுகளும் முறையே P என்ற புள்ளியின் x ஆயத்தொலையும், y ஆயத்தொலையுமாகும். இம்முறையைப் பிரெஞ்சு நாட்டுக் கணித மேதை ரெனே தெக்கார்டி (Rene Descartes) (1596-1650) என்பவர் முதலில் கையாண்டதால் இவை செவ்வகக் கார்டிசியன் ஆயத்தொலைகள் (Rectangular Cartesian Coordinates) எனப்படுகின்றன. $OM=x$, $MP=y$ எனில், P புள்ளியின் அச்சுத் தூரங்கள் அல்லது ஆயத்தொலைகள் சுருக்கமாக (x, y) எனக் குறிப்பிடப்படுகின்றன. ஆதியின் ஆயத்தொலைகள் $(0, 0)$ ஆகும்.

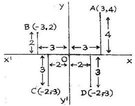
y ஆயத்திற்கு வலப்புறமாக அளக்கப்படும் x ஆயத்தொலைகள் நேர்மதிப்பும் (positive value), இடப்புறமாக அளக்கப்படுபவை எதிர் மதிப்பும் (negative value) கொண்டிருக்கும். இவ்வாறே x ஆயத்திற்கு மேற்புறமாக அளக்கப்படும் y ஆயத் தொலைகள் நேர்மதிப்பும், கீழ்ப்புறமாக அளக்கப்படுபவை எதிர் மதிப்பும்



படம் 2.

கொண்டிருக்கும். எனவே, முதற் காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளின் இரண்டு ஆயத்தொலைகளும் நேர்மதிப்புடையனவாகவும், மூன்றும் காற்பகுதியிலுள்ள புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் எதிர் மதிப்புடையனவாகவும் இருக்கும். இரண்டாம் காற்பகுதியில் x ஆயத்தொலை எதிர்மதிப்பும், y ஆயத்தொலை நேர் மதிப்பும் கொண்டவை. நான்காம் காற்பகுதியில் x ஆயத்தொலை நேர் மதிப்பும், y ஆயத்தொலை எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 1: $A(3, 4)$, $B(-3, 2)$, $C(-2, -3)$, $D(2, -3)$ என்ற புள்ளிகளை ஒரு தாளில் குறிக்கவும்.



படம் 3.

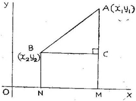
OX-ன் மீது 3 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY-க்கு இணையாக 4 அலகு தூரம் அளந்தால் $A(3,4)$ புள்ளியையும்,

OX'-ன் மீது 3 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY-க்கு இணையாக 2 அலகு தூரம் அளந்தால் $B(-3, 2)$ புள்ளியையும்,

OX'-ன்மீது 2 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY'க்கு இணையாக 3 அலகு தூரம் அளந்தால் $C(-2, -3)$ புள்ளியையும்,

OX-ன்மீது 2 அலகு தூரம் குறித்துப் பின் OY'-க்கு இணையாக 3 அலகு தூரத்தையும் அளந்தால் $D(2, -3)$ புள்ளியையும் பெறலாம்.

1·3. இரு புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்



படம் 4.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகள் A, B எனவும், அவை களின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனவும் கொள்வோம். x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM, BN என்ற இரு செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். B, C-ஐ இணைக்கவும்.

$$OM = x_1,\ ON = x_2,\ MA = y_1,\ NB = y_2$$

$$\therefore\ BC = NM = OM - ON = x_1 - x_2$$

$$AC = AM - CM = AM - BN = y_1 - y_2$$

செங்கோண முக்கோணம் ABC-யில்,

$$AB^2 = BC^2 + AC^2$$

$$\therefore\ AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

கிளை : $O(0, 0)$, $A(x_1, y_1)$ ஆதலால்,

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2.$$

பயிற்சி 1.1.

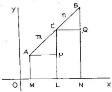
பின் வரும் புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரத்தைக் காண்க :

1. $(5,8)$, $(4,5)$
2. $(8,1)$, $(-2,2)$
3. $(-7,2)$, $(3,-4)$
4. $(-3,-5)$, $(-6,-3)$
5. $(a \cos \theta,\ a \sin \theta)$, $(a \cos \phi,\ a \sin \phi)$
6. $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$
7. $(2,1)$, $(5,4)$, $(4,7)$, $(1,4)$ என்ற புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.
8. (a,a), $(-a,-a)$, $(-a\sqrt{3}, a\sqrt{3})$ என்ற புள்ளிகள் ஒரு சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகள் என நிறுவுக.
9. $(1,7)$, $(8,6)$, $(7,-1)$ என்ற புள்ளிகளுக்குச் சமதூரத்திலுள்ள புள்ளியைக் காண்க.

விடைகள்

1. $\sqrt{10}$. 2. $\sqrt{26}$. 3. $\sqrt{136}$. 4. $\sqrt{13}$.
5. $2a \sin\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$. 6. $a(t_1 - t_2)\sqrt{(t_1 + t_2)^2 + 4}$.
9. $(4, 4)$.

1·4. (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.



படம் 5.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம். AB என்ற கோட்டை உட்புறம் $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி $C(x, y)$ எனில்,

$$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}.$$

x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM, BN, CL என்ற கோடுகளையும், CL, BN என்பவைகளுக்குச் செங்குத்தாக AP, CQ என்ற கோடுகளையும் வரைக.

$$AP = ML = OL - OM = x - x_1$$
$$CQ = LN = ON - OL = x_2 - x$$
$$CP = CL - PL = CL - AM = y - y_1$$
$$BQ = BN - QN = BN - CL = y_2 - y.$$

$\triangle ACP$, $\triangle BCQ$ இரண்டும் வடிவொத்தவை.

$$\therefore \quad \frac{AP}{CQ} = \frac{m}{n} \quad (\text{அ-து}) \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{m}{n}$$

$$\therefore \quad m(x_2 - x) = n(x - x_1) \quad (\text{அ-து}) \; x = \frac{mx_2 + nx_1}{m + n}$$

மேலும், $\dfrac{CP}{BQ} = \dfrac{m}{n} \quad \therefore \quad \dfrac{y - y_1}{y_2 - y} = \dfrac{m}{n}$

$$\therefore \quad m(y_2 - y) = n(y - y_1)$$

$$(\text{அ-து}) \quad y = \frac{my_2 + ny_1}{m + n}.$$

எனவே AB என்ற கோட்டை $m:n$ விகிதத்தில் உட்புறமாகப் பிரிக்கும் புள்ளி C-யின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \quad \frac{my_2 + ny_1}{m+n}\right)$$

இவ்வாறே AB கோட்டைப் புள்ளி C' வெளிப்புறம் $m:n$ விகிதத்தில் பிரிக்குமெனின், C-யின் ஆயத்தொலைகள்

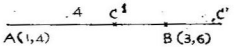
$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \quad \frac{my_2 - ny_1}{m-n}\right)$$

என நிறுவலாம்.

கிளை : (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

மாதிரி 2 : (1, 4), (3, 6) என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினை 4 : 1 விகிதத்தில் உள்ளும் புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் காண்க.



படம் 6.

$A(1, 4)$, $B(3, 6)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டினை $4:1$ விகிதத்தில் உட்புறம் C-யும், வெளிப்புறம் C'-ம் பிரிக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

C-யின் ஆயத்தொலைகள்

$$x = \frac{4(3) + 1(1)}{4+1} = \frac{13}{5}$$

$$y = \frac{4(6) + 1(4)}{4+1} = \frac{28}{5}.$$

$\therefore$ C-யின் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{13}{5}, \frac{28}{5}\right)$

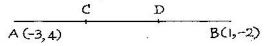
C'-ன் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{4(3) - 1(1)}{4 - 1} = \frac{11}{3}$$

$$y = \frac{4(6) - 1(4)}{4 - 1} = \frac{20}{3}$$

$\therefore$ C'-ன் ஆயத் தொலைகள் $\left(\frac{11}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

மாதிரி 3 : $A(-3, 4)$, $B(1, -2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைக் காண்க.



படம் 7.

AB என்ற கோட்டை C, D புள்ளிகள் முச்சமக் கூறிடுகின்றன எனில் $AC = CD = DB$. (அ-து) AB கோட்டை C உட்புறம் $1 : 2$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது. மேலும் CB-யின் நடுப்புள்ளி D ஆகும்.

$\therefore$ C-யின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{1(1) + 2(-3)}{1 + 2} = -\frac{5}{3}$$

$$y = \frac{1(-2) + 2(4)}{1 + 2} = 2$$

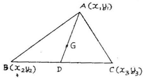
D-யின் ஆயத் தொலைகள்

$$x = \frac{-\frac{5}{3} + 1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$y = \frac{2 + (-2)}{2} = 0$$

எனவே AB கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் $C\left(-\frac{5}{3}, 2\right)$, $D\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$.

மாதிரி 4 : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (Centroid) காண்க.



படம் 8.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம். BC-யின் நடுப்புள்ளி D எனில் அதன் ஆயத் தொலைகள்

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

ஆகும். மையக் கோட்டுச் சந்தி G மையக் கோடு AD-யின் மீது அமையும். மேலும் G, மையக் கோட்டை $2 : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

(அ-து) $AG : GD = 2 : 1$

$\therefore$ G-யின் ஆயத் தொலைகள்

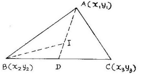
$$x = \frac{2\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + 1 . x_3}{2 + 1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

$$y = \frac{2\left(\frac{y_1 + y_2}{2}\right) + 1 . y_3}{2 + 1} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

எனவே, மையக் கோட்டுச் சந்தி

$$G\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 5 : (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையம் (Incentre) காண்க.



படம் 9.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ எனக்கொள்வோம்.

கோணம் A-யின் உள்ளிரு சமவெட்டி BC-ஐ D-யில் வெட்டுகிறது.

$$\therefore\ \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}\ (1)\ [\because AB = c,\ BC = a,\ CA = b]$$

எனவே, D-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\dfrac{cx_3+bx_2}{c+b},\ \dfrac{cy_3+by_2}{c+b}\right]$

முக்கோணத்தின் உள் வட்டமையம் I, AD-யின் மீதமையும்.

$$(1)\text{-லிருந்து}\ \frac{BD+DC}{BD} = \frac{c+b}{c}\ (\text{அ-து})\ \frac{BC}{BD} = \frac{b+c}{c}.$$

$$\therefore\ BD = \frac{c}{b+c},\ BC = \frac{ac}{b+c}.$$

BI என்ற கோடு $\angle B$-யின் உள்ளிரு சமவெட்டியாதலின்,

$$\frac{AI}{ID} = \frac{AB}{BD} = \frac{c}{\dfrac{ac}{b+c}} = \frac{b+c}{a}$$

(அ-து) AD-ஐ I புள்ளி $b+c : a$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

∴ I-யின் ஆயத்தொலைகள்,

$$x = \frac{(b+c)\left[\dfrac{cx_3+bx_2}{b+c}\right] + a(x_1)}{b+c+a} = \frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c}$$

$$y = \frac{(b+c)\left[\dfrac{cy_3+by_2}{b+c}\right] + a(y_1)}{b+c+a} = \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}$$

எனவே உள்வட்ட மையத்தின் ஆயத்தொலைகள்

$$I\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\ \frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c}\right).$$

பயிற்சி 1.2.

1. $A(0, -2)$, $B(5, 1)$, $C(10, 4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும் என நிறுவுக.

2. $A(1, -2)$, $B(8, 2)$, $C(6, 8)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும் என நிறுவி $AB : BC$ காண்க.

3. $(1, -3)$, $(-3, 9)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை உள்ளும் புறமும் $1 : 3$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகள் யாவை ?

4. $A(2, 4)$, $B(-4, 6)$, $C(6, 0)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தில் BC-யின் நடுப் புள்ளி D எனில், AD-ஐ உள்ளும் புறமும் $2 : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளிகளைக் காண்க.

5. $(-5, 12)$, $(9, -2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி $(-8, -5)$, $(7, 10)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை முச்சமக் கூறிடும் என நிறுவுக.

6. $(2, 1)$, $(5, 4)$, $(1, 4)$ என்ற புள்ளிகள் ஓர் இணைகரத்தின் மூன்று உச்சிகளெனில் $(2, 1)$ புள்ளிக்கு எதிரிலிருக்கும் நான்காவது உச்சி யாது ?

7. பின் வரும் புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணங்களின் மையக்கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

(i) (3, − 4), (− 2, 5), (5, 2)

(ii) (− 3, 6), (5, 2), (1, − 5)

(iii) (6, − 4), (2, −2), (7, 0)

8. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் (7, 2), (1, 6). அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தி (4, 6) எனில் மூன்று வது முனையைக் காண்க.

9. ஒரு முக்கோணத்தின் இரு முனைகள் (3, − 1), (− 2, 3). அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தி ஆதி (origin) எனில் மூன்றுவது முனையைக் காண்க

10. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நடுப் புள்ளி கள் (6, − 1), (− 1, − 2), (1, − 3) எனில் அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

11. ஒரு முக்கோணத்தின் மூன்று பக்கங்களின் நடுப் புள்ளி கள் (6, − 1), (−1, − 2), (1, −3) எனில் அதன் மையக் கோட்டுச் சந்தியைக் காண்க.

12. *ABCD* என்ற நாற்கரத்தின் அடுத்தடுத்த முனைகள் (− 1, − 2), (2, 1), (3, 4), (1, 2) எனில் *BD* மூலை விட்டத்தை (diagonal) *AC* மூலை விட்டம் பிரிக்கும் விகிதம் காண்க.

13. (1, −3), (−1, − 5) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை (7, 3) என்ற புள்ளி பிரிக்கும் விகிதம் யாது ?

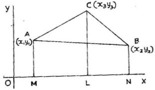
14. ஒரு முக்கோணத்தில் யாதேனும் இரு பக்கங்களின் நடுப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு மூன்றும் பக்கத்தின் பாதிக்குச் சமம் என நிறுவுக.

15. (2, 3), (−5, 1) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை *y* அச்சு பிரிக்கும் விகிதம் யாது ?

விடைகள்

2. 2 : 3. 3. $\left(\frac{10}{7}, \frac{33}{7}\right)$; (−2, −9). 4. (1, 3); $\left(\frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$. 6. (4, 7). 7. (i) (2, 1); (ii) (1, 1); (iii) (5, −2). 8. (4, 10). 9. (−1, −2). 10. (2, −2). 13. வெளியே 3 : 4. 15. 2 : 5.

1·5. முக்கோணத்தின் பரப்பு



படம் 10.

$A\ (x_1, y_1)$, $B\ (x_2, y_2)$, $C\ (x_3, y_3)$ முக்கோணத்தின் மூன்று உச்சிகள் எனக் கொள்வோம்.

x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக AM, BN, CL என்ற கோடுகள் வரையவும்.

$$ML = OL - OM = x_3 - x_1; \quad AM = y_1$$
$$LN = ON - OL = x_2 - x_3; \quad CL = y_3$$
$$MN = ON - OM = x_2 - x_1; \quad BN = y_2$$

$\triangle$ ABC-யின் பரப்பு = சரிவகம் (trapezium) $ACLM$ + சரிவகம் $BCLN$ − சரிவகம் $ABNM$.

$$\therefore \triangle ABC = \tfrac{1}{2}(AM+CL)\,ML + \tfrac{1}{2}(CL+BN)\,LN - \tfrac{1}{2}(AM+BN)\,MN$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[(y_1+y_3)(x_3-x_1) + (y_3+y_2)(x_2-x_3) - (y_2+y_1)(x_2-x_1)\right]$$

இதனைச் சுருக்கின்,

$$\triangle ABC = \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right].$$

கிளை 1: $(0, 0)$, (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\tfrac{1}{2}[x_1 y_2 - x_2 y_1]$.

கிளை 2: யாதேனும் மூன்று புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புப் பூச்சியம் (zero) எனின் அம் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டிலமையும்.

குறிப்பு : முக்கோணம் ABC-யைச் சுற்றி வரும்போது முக்கோணம் இடப்புறமாக இருக்குமாறு A, B, C புள்ளிகளைக் குறித்தால் முக்கோணத்தின் பரப்பு நேர்மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 6 : $(1, 1)$, $(4, -7)$, $(6, -2)$ புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு யாது ?

$$x_1 = 1;\quad x_2 = 4;\quad x_3 = 6$$
$$y_1 = 1;\quad y_2 = -7;\quad y_3 = -2.$$

$$\triangle = \tfrac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[1(-7+2) + 4(-2-1) + 6(1+7)\right]$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[-5 - 12 + 48\right] = \tfrac{31}{2}.$$

$\therefore$ முக்கோணத்தின் பரப்பு $= \frac{31}{2}$ சதுர அலகுகள் (square units).

பயிற்சி 1.3.

1. பின் வரும் புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.
   (i) $(2, 3)$; $(3, -1)$; $(-4, 2)$
   (ii) $(3, 5)$; $(9, 3)$; $(5, 2)$
   (iii) $(-2, 3)$; $(-7, 5)$; $(3, -5)$.

2. பின் வரும் புள்ளிகளாலமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பைக் காண்க.
   (i) $(1, 2)$, $(2, -3)$, $(-1, -5)$, $(-2, 4)$
   (ii) $(-4, 2)$, $(3, -5)$, $(6, -2)$, $(1, 7)$
   (iii) $(-3, -3)$, $(1, -2)$, $(2, 2)$, $(-2, 3)$.

3. பின் வரும் புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டிலமையும் என நிறுவுக.
   (i) $(1, 4)$, $(3, -2)$, $(-3, 16)$
   (ii) $(4, 2)$, $(7, 5)$, $(9, 7)$
   (iii) $(2, 5)$, $(4, 6)$, $(8, 8)$.

4. $(1, 8)$, $(3, 0)$, $(a, -4)$ என்ற புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டிலமையும் எனில் a-யின் மதிப்பு என்ன ?

விடைகள்

1. (i) 25; (ii) 7; (iii) 15.
2. (i) 21; (ii) 112; (iii) 20.
4. 4.

1·6. நியமப்பாதை (அ – து) இயங்கு வழி (Locus)

ஒரு புள்ளி ஒன்று அல்லது ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட விதிகளுக்கிணங்க இயங்குமாயின் அப் புள்ளியின் பாதை நியமப்பாதை அல்லது இயங்கு வழி எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக, Q, R என்ற இரு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து (fixed points) எப்பொழுதும் சம தூரத்திலிருக்குமாறு P என்ற புள்ளி இயங்குமாயின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி நிலைத்த புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டிற்கு மைய்க் கோடாக அமையும். அதாவது, இந்தக் கோட்டின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்கும். இங்கு இயங்கு வழி ஒரு நேர்க் கோடாகும்.

மேலும், O என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் சம தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் P என்ற புள்ளியின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டமாகும். இவ் வட்டத்தின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியும் நிலைத்த புள்ளி O-விலிருந்து சம தூரத்திலிருக்கும். நிலைத்த புள்ளி வட்டத்தின் மையம். நிலையான தூரம் அவ் வட்டத்தின் ஆரமாகும்.

ஒரு குறிப்பிட்ட விதிப்படி இயங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வழியை ஒரு சமன்பாட்டின் மூலம் தெரிவிக்கலாம். எடுத்துக்காட்டாக $(1, 2)$, $(3, 4)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x, y)$ எனின், இம் மூன்று புள்ளிகளாலும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்புப் பூச்சியமாகும்.

எனவே, $\frac{1}{2}[x(2-4) + 1(4-y) + 3(y-2)] = 0.$

இதைச் சுருக்கின் $x - y + 1 = 0$ என்றாகும். இச் சமன்பாடு அக் கோட்டின் மீதுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகளுக்கும் பொருந்தும். இதுவே அக் கோட்டின் சமன்பாடு எனப்படும். பொதுப்படையாகப் பல புள்ளிகள் ஒரு விதிப்படி இயங்கின் அவை ஓர் இயங்கு வழியில் அமைகின்றன. இப் புள்ளிகள் அனைத்தும் பொருந்தியும், மற்றப் புள்ளிகள் பொருத்தமின்றியும் காணப்படும் சமன்பாடுதான் இப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி எனப்படும்.

மாதிரி 7 : (1, 2) என்ற நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் 5 அலகு தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

நிலைத்த புள்ளி $C(1, 2)$, நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore \; CP^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$.

ஆனால், $CP^2 = 5^2 = 25$.

$\therefore \; (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

எனவே $P(x, y)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.

மாதிரி 8 : $A(1, 2)$, $B(3, 4)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலிருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழி என்ன ?

கொடுக்கப்பட்டுள்ள விதிக்கிணங்க நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$PA^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2$

$PB^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$.

விதிப்படி $PA = PB \quad \therefore \; PA^2 = PB^2$

$(x-1)^2 + (y-2)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2$

$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = x^2 + y^2 - 6x - 8y + 25$

$\therefore \; 4x + 4y - 20 = 0$

(அ-து) $x + y - 5 = 0$.

$P(x, y)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி $x + y - 5 = 0$.

மாதிரி 9 : (2, 0), (− 2, 0) என்ற புள்ளிகளிலிருந்து 4 : 3 விகித தூரத்தில் நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள கட்டுப்பாட்டிற்கிணங்க நகரும் புள்ளி $P(x, y)$ எனக் கொள்வோம்.

$A(2, 0)$, $B(-2, 0)$ எனில்

$$PA^2 = (x-2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 - 4x + 4$$

$$PB^2 = (x+2)^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 4x + 4$$

கட்டுப்பாடு $\frac{PA}{PB} = \frac{4}{3} \quad \therefore \quad \frac{PA^2}{PB^2} = \frac{16}{9}$

$$\therefore \quad \frac{x^2 + y^2 - 4x + 4}{x^2 + y^2 + 4x + 4} = \frac{16}{9}$$

(அ-து) $16x^2 + 16y^2 + 64x + 64 = 9x^2 + 9y^2 - 36x + 36$

$$\therefore \quad 7x^2 + 7y^2 + 100x + 28 = 0$$

எனவே $P(x, y)$-யின் இயங்கு வழி $7x^2 + 7y^2 + 100x + 28 = 0$.

பயிற்சி 1.4.

1. $(2, 3)$, $(4, 5)$ புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரத்திலியங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வழி என்ன ?

2. ஆதியிலிருந்து தனக்குள்ள தூரம் $(2, 2)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து தனக்குள்ள தூரத்தை விட இரு மடங்கு இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழி என்ன ?

3. ஒரு புள்ளியின் y ஆயத் தொலை அதன் x ஆயத் தொலையை விட இரு மடங்கெனில் அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி என்ன ?

4. $(1, -1)$ புள்ளியிலிருந்து எப்பொழுதும் 3 அலகு தூரத்திலியங்கும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

5. $(2, 3)$, $(-3, 4)$ என்ற புள்ளிகளுடன் $P(x, y)$ புள்ளி அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு 8·5 எனில் P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

6. $(2, 2)$, $(-2, -2)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$ புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 48 எனில் P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

7. $(a, 0)$, $(-a, 0)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$ புள்ளியின் தூரங்களின் வர்க்கங்கள்தம் கூட்டுத் தொகை $4a^2$ எனில் P-யின் இயங்கு வழி என்ன ?

8. ஆயங்களுக்கும் தனக்குமுள்ள தூரங்களின் வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை 9 ஆக இருக்குமாறு நகரும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

9. $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$ புள்ளிகளிலிருந்து $P(x, y)$-யின் தூரங்கள்தம் கூட்டுத் தொகை $2a$ எனில் P-யின் இயங்கு வழி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என நிறுவுக $[b^2 = a^2(1 - e^2)]$.

விடைகள்

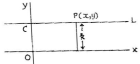
1. $x+y-7=0$. 2. $3x^2+3y^2-16x-16y+32=0$. 3. $y=2x$. 4. $x^2+y^2-2x+2y-7=0$. 5. $x+5y-34=0$. 6. $x^2+y^2=16$. 7. $x^2+y^2=a^2$. 8. $x^2+y^2=9$.

2. நேர்க்கோடு

(The Straight Line)

2·1. x ஆயத்திற்கிணையான நேர்க்கோடு

x ஆயத்திற்கிணையாக CL என்ற ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்திலிருந்து k அலகு தூரத்தில் வரையவும். அக்கோட்டின் மீது $P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் அப்புள்ளியின் y ஆயத்



படம் 11.

தொலை k ஆகும். (அ-து) $y=k$. இஃது அக்கோட்டின் மீதமைந்துள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும்.

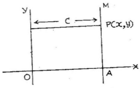
எனவே $y=k$ என்பது x ஆயத்திற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடாகும். இதில் x காணப்படாதது குறிப்பிடத்தக்கது.

கிளை : x ஆயத்தின் சமன்பாடு $y=0$.

2·2. y ஆயத்திற்கிணையான நேர்க்கோடு

y ஆயத்திற்கிணையாக AM என்ற ஒரு நேர்க்கோடு y ஆயத்திலிருந்து c அலகு தூரத்தில் வரையவும். அக்கோட்டின்மீது

$P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் அப்புள்ளியின் x ஆயத் தொலை c ஆகும். (அ-து) $x=c$. இஃது அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும்.



படம் 12.

எனவே y ஆயத்திற்கிணையாக c அலகு தூரத்திலுள்ள ஒரு நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x=c$ ஆகும். இச்சமன்பாட்டில் y காணப்படாதது குறிப்பிடத்தக்கது.

குறிப்பு : y ஆயத்தின் சமன்பாடு $x=0$ ஆகும்.

மாதிரி 1 : x ஆயத்திலிருந்து 6 அலகு தூரத்தில் அதற்கிணையாக உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x = 6$ (அ-து) $x-6=0$ ஆகும்.

x ஆயத்திலிருந்து -5 அலகு தூரத்தில் அதற்கிணையாக உள்ள நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $x = -5$ (அ-து) $x + 5 = 0$ ஆகும்.

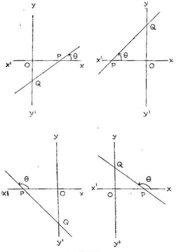
y ஆயத்திலிருந்து 7 அலகு தூரத்தில் அதற்கு இணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = 7$ (அ-து) $y - 7 = 0$ ஆகும்.

y ஆயத்திலிருந்து -4 அலகு தூரத்தில் அதற்கிணையாகச் செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $y = -4$ (அ-து) $y+4=0$ ஆகும்.

2·3. நேர்க்கோட்டின் சரிவு (Gradient or Slope)

PQ என்ற நேர்க்கோடு x ஆயத்தை P-யில் வெட்டுகிறது எனக்கொள்வோம். PX என்ற கோட்டை P-யில் ஆரம்பித்து இடஞ்சுழியாகச்சுழற்றி (anticlockwise) PQ என்ற நிலைக்குக் கொண்டு

வரவும். PX கோட்டைச் சுழற்றிய கோணம் θ எனக்கொள்வோம். மேலே கொடுக்கப்பட்டுள்ள படங்களிலிருந்து θ கோணம் $0°$-க்கு மேல் $180°$-க்குள் உள்பட்டதாயிருக்கும் என அறிகிறோம்.



படம் 13.

(அ–து) ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்தை எப்படி வெட்டினாலும் அக்கோடு x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் $0°$-க்கு மேல் $180°$-க்குள் ஏதோ ஒரு மதிப்புடையதாயிருக்கும்.

$\tan \theta$ என்பது நேர்க்கோட்டின் சாய்வு வீதம் அல்லது சரிவு எனப்படும். அதை m எனக் குறிப்பிடுவது மரபு. (அ–து) $m = \tan \theta$. θ குறுங்கோண மெனின் சரிவு m நேர் மதிப்பும், விரிகோண மெனின் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் சமமாதலால் அவைகளின் சரிவுகள் சமமாக இருக்கும். (அ-து) சரிவுகள் சமமெனின் அக் கோடுகள் இணை கோடுகளாகும்.

x ஆயம், அதற்கு இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் யாவற்றிற்கும் சரிவு பூச்சியம் [$\because \tan 0 = 0$].

y ஆயம், அதற்கு இணையாகச் செல்லும் கோடுகள் யாவற்றிற்கும் சரிவு கந்தழியாகும் [$\because \tan 90 = \infty$).

2·4. வெட்டுத்துண்டு (Intercept)

ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்தை A புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். O ஆதி எனில் OA, OB என்பவை முறையே x-வெட்டுத் துண்டு (x-intercept), y-வெட்டுத்துண்டு (y-intercept) எனப்படுகின்றன. வெட்டுத் துண்டுகள் நேர் மதிப்புடையனவாகவோ, எதிர் மதிப்புடையனவாகவோ இருக்கும்.

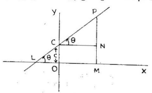
2·5. நேர்க்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

ஒரு நேர்க்கோட்டைத் தீர்மானிக்க இரு கட்டுப்பாடுகள் போதுமானவையும், தேவையானவையுமாகும்.

2·6. வெட்டுத்துண்டு சரிவு வடிவம் (Intercept-Slope Form)

ஒரு நேர்க்கோட்டின் சரிவும், y ஆயத்தில் அஃது ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டும் கொடுக்கப்படின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள சரிவு $m = \tan\theta$ எனவும், அக்கோடு y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டு c எனவும் கொள்வோம்.



படம் 14.

y ஆயத்தின்மீது $OC = c$ அளவிற்கு C என்ற புள்ளியைக் குறித்து C வழியாக x ஆயத்துடன் θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள CL என்ற கோடு வரையவும். CL என்ற கோட்டின் சமன்பாடு காண அக் கோட்டின்மீது $P(x,y)$ என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியைக் குறிக்கவும். x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM என்ற கோடும், PM-க்குச் செங்குத்தாக CN என்ற கோடும் வரையவும்.

$\angle PCN = \theta$ (ஒத்த கோணம்)

$OM = x,\ MP = y$

$\therefore\ CN = OM = x;\ NP = MP - MN = MP - OC = y - c;$
CPN என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்

$$\tan\theta = \frac{NP}{CN} = \frac{y-c}{x}$$

$$\therefore\ y = x\tan\theta + c$$

(அ - து) $y = mx + c.$ $(\because\ m = \tan\theta)$

இத்தொடர்பு அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும். எனவே அக்கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + c.$

கிளை : ஆதிவழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx$ ஆகும். $[\because\ c = 0]$

மாதிரி 2 : x ஆயத்துடன் $-60°$ சாய்ந்துள்ள ஒரு நேர்க் கோடு y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டின் அளவு -7 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு யாது ?

கோட்டின் சரிவு $m = \tan(-60) = -\tan 60 = -\sqrt{3}$

y வெட்டுத்துண்டு $c = -7$

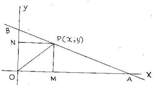
எனவே, கோட்டின் சமன்பாடு $y = (-\sqrt{3})\,x + (-7)$

(அ - து) $\sqrt{3}\,x + y + 7 = 0$

2·7. வெட்டுத்துண்டு வடிவம் (Intercept Form)

நேர்க்கோடு இரண்டு ஆயங்களிலும் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள் கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது அக்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

ஒரு நேர்க்கோடு x, y ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகளின் நீளங்கள் முறையே a, b எனக் கொள்வோம். நேர்க்கோடு ஆயங்களை A, B என்ற புள்ளிகளில் வெட்டினால் $OA = a$, $OB = b$ ஆகும்.



படம் 15.

AB என்ற கோட்டின் சமன்பாடு காண, $P(x, y)$ அதன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்வோம். OP-ஐ இணைக்கவும். ஆயங்களுக்குச் செங்குத்தாக PM, PN என்ற கோடுகள் வரைக.

$$\triangle OAP + \triangle OPB = \triangle OAB$$

$$\therefore \tfrac{1}{2} OA.MP + \tfrac{1}{2} OB.NP = \tfrac{1}{2} OA.OB$$

$$\tfrac{1}{2} ay + \tfrac{1}{2} bx = \tfrac{1}{2} ab$$

(அ-து) $ay + bx = ab$

இருபக்கமும் ab ஆல் வகுக்க.

$$\frac{y}{b} + \frac{x}{a} = 1$$

(அ-து) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ என்றாகும்.

இத்தொடர்பு அக்கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும். எனவே AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

மாதிரி 3: ஒரு நேர்க்கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் -5, 6 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

x-வெட்டுத்துண்டு $a = -5$

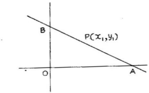
y-வெட்டுத்துண்டு $b = 6$

எனவே அக்கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{-5} + \dfrac{y}{6} = 1$

(அ - து) $6x - 5y + 30 = 0.$

மாதிரி 4 : இரண்டு ஆயங்களுக்குமிடைப்பட்டுக் கிடக்கும் பகுதியின் நடுப்புள்ளி (x_1y_1) எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

ஆயங்களுக்கிடைப்பட்டுக் கிடக்கும் பகுதி AB எனவும், அதன் நடுப்புள்ளி $P(x_1y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 16.

$OA = a$, $OB = b$ எனில் A, B-யின் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$, $(0, b)$ ஆகும்.

$\therefore \; x_1 = \dfrac{a+0}{2}$ (அ - து) $a = 2x_1$

$y_1 = \dfrac{0+b}{2}$ (அ - து) $b = 2y_1$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

(அ - து) $\dfrac{x}{2x_1} + \dfrac{y}{2y_1} = 1$

மாதிரி 5 : ஒரு நேர்க்கோடு P $(-4, 3)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது. இரண்டு ஆயங்களுக்குமிடைப்பட்டு நிற்கும் அக்கோட்டின்

பகுதியை P புள்ளி $5 : 3$ விகிதத்தில் பிரிக்குமெனின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

கோட்டின் சமன்பாடு $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ எனக் கொள்வோம். அக்கோடு ஆயங்களை $(a, 0)$, $(0, b)$ புள்ளிகளில் சந்திக்கும். $(a, 0)$, $(0, b)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் பகுதியை $P(-4, 3)$ புள்ளி $5 : 3$ விகிதத்தில் பிரிக்கிறது.

$$\therefore \quad -4 = \frac{5(0) + 3(a)}{5 + 3} = \frac{3a}{8} \qquad (\text{அ - து}) \quad a = \frac{-32}{3}$$

$$3 = \frac{5(b) + 3(0)}{5 + 3} = \frac{5b}{8} \qquad (\text{அ - து}) \quad b = \frac{24}{5}$$

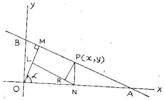
எனவே கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{\frac{-32}{3}} + \frac{y}{\frac{24}{5}} = 1 \qquad (\text{அ-து}) \; -\frac{3x}{32} + \frac{5y}{24} = 1$$

(அ - து) $9x - 20y + 96 = 0$.

2·8. செங்குத்து வடிவம் (Normal Form)

ஆதியிலிருந்து கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளமும், அச் செங்குத்துக் கோடு x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணமும் கொடுக்கப்பட்டுள்ளனவெனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.



படம் 17.

ஒரு நேர்க்கோடு ஆயங்களை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். AB-க்குச் செங்குத்தாக OM என்ற கோடு வரையவும்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ளவை $OM = p$, $\angle XOM = \alpha$ எனக் கொள்வோம். p, α இவைகளைச் சார்ந்து AB என்ற கோட்டிற்குச் சமன்பாடு காணல் வேண்டும்.

AB கோட்டின் மீது $P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க. OX-க்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோடும், OM-க்குச் செங்குத்தாக NL என்ற கோடும் வரைக. P-யிலிருந்து LN-க்குச் செங்குத்தாக PR என்ற கோடு வரையவும்.

$$\angle RNP = 90 - \angle RNO = \angle NOL = \alpha.$$

செங்கோண முக்கோணம் ONL-லில் $OL = ON \cos \alpha$ (1)

செங்கோண முக்கோணம் RNP-யில் $RP = NP \sin \alpha$

$\therefore \quad LM = RP = NP \sin \alpha$ (2)

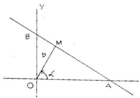
$OM = OL + LM$

$\therefore \quad p = ON \cos \alpha + NP \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha$.

எனவே AB-யின் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

பிறிதொரு முறை



படம் 18.

AB என்ற நேர்க்கோடு x, y ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள் முறையே OA, OB ஆகும்.

செங்கோண முக்கோணம் OMA-யில் $OA = OM \sec \alpha$

செங்கோண முக்கோணம் OMB-யில் $OB = OM \sec(90 - \alpha)$

$= OM \operatorname{cosec} \alpha$.

கோடு AB-யின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{OA} + \frac{y}{OB} = 1 \quad \text{(வெட்டுத்துண்டு வடிவம்)}$$

$$\therefore \quad \frac{x}{OM \sec \alpha} + \frac{y}{OM \operatorname{cosec} \alpha} = 1$$

$$\frac{x}{OM} \cos \alpha + \frac{y}{OM} \sin \alpha = 1$$

$\therefore$ AB-யின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$. $[\because OM = p]$

குறிப்பு : AB என்ற கோட்டின் எல்லா நிலைகளுக்கும் p நேர் மதிப்புடையதாகும். மேலும் கோணம் α, x ஆயத்திலிருந்து இடஞ் சுழியாக அளக்கப்படுகிறது. இதன் மதிப்பு $0°$-க்கு மேல் $360°$-க்கு உட்பட்டதாயிருக்கும்.

2·8·1. $Ax + By + C = 0$ வடிவிலுள்ள கோட்டின் சமன்பாட்டைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதுதல்.

நேர்க் கோட்டின் பொது வடிவம்,

$$Ax + By + C = 0 \text{ என்போம்.} \qquad (1)$$

நேர்க் கோட்டின் செங்குத்து வடிவம்,

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0.$$

$$\therefore \quad \frac{A}{\cos \alpha} = \frac{B}{\sin \alpha} = \frac{C}{-p} \; (= K \text{ என்க})$$

$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{A}{K}, \sin \alpha = \frac{B}{K}. \qquad (2)$$

எனவே $\frac{A^2}{K^2} + \frac{B^2}{K^2} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$

$\therefore$ $K^2 = A^2 + B^2$ (அ-து) $K = \pm \sqrt{A^2 + B^2}$
K-யின் மதிப்பை (2)-இல் பிரதியிட

$$\cos \alpha = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$-p = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

எனவே $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0$$

என்றாகும்.

$\therefore$ $Ax + By + C = 0$-த்தின் செங்குத்து வடிவம்

$$\frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,x + \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}\,y + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} = 0.$$

குறிப்பு : $C < 0$ எனில் $\sqrt{A^2+B^2}$ நேர் மதிப்பும், $C > 0$ எனில் $\sqrt{A^2+B^2}$ எதிர் மதிப்பும் பெற வேண்டும். $C = 0$ எனில் B-யின் குறியை $\sqrt{A^2+B^2}$ கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 6. $x + \sqrt{3}\,y - 6 = 0$ சமன்பாட்டைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதி, அது குறிக்கும் கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

$$x + \sqrt{3}y - 6 = 0\text{-த்தின்}$$

செங்குத்து வடிவம் $\dfrac{x}{\sqrt{1+3}} + \dfrac{\sqrt{3}\,y}{\sqrt{1+3}} - \dfrac{6}{\sqrt{1+3}} = 0$

ஆகும்.

(அ-து) $\frac{1}{2}\,x + \frac{\sqrt{3}}{2}\,y - 3 = 0$

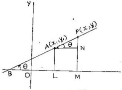
$\therefore$ $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $p = 3$

எனவே செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 3.

2·9. புள்ளி—சரிவு வடிவம் (Point—Slope Form)

கோட்டின் சரிவும், அதன் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியும் கொடுக்கப் பட்டிருப்பின் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளி $A\,(x_1, y_1)$ எனவும், சரிவு $m = \tan\theta$ எனவும் கொள்வோம். கோடு AB எனவும், $P\,(x, y)$ அதன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.



படம் 19.

OX-க்குச் செங்குத்தாக AL, PN என்ற கோடுகளும், PM-க்குச் செங்குத்தாக AN என்ற கோடும் வரையவும்.

$$\angle NAP = \angle XBP = \theta$$

$$AN = LM = OM - OL = x - x_1$$

$$PN = MP - MN = MP - LA = y - y_1$$

செங்கோண முக்கோணம் ANP-யில்,

$$\tan\theta = \frac{PN}{AN} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

(அ-து) $m = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$

இஃது அக் கோட்டின் மீதுள்ள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் பொருந்தும். எனவே, AB என்ற நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = m(x - x_1).$$

பிறிதொரு முறை

கோட்டின் சரிவு m ஆதலால், அதன் சமன்பாடு $y = mx + c$ ஆகும்.

இக்கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்வதால்

$$y_1 = mx_1 + c$$

$$\therefore \quad c = y_1 - mx_1$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y = mx + (y_1 - mx_1)$$

(அ - து) $y - y_1 = m(x - x_1)$

2·10. இரு புள்ளி வடிவம் (Two-Point Form) கோட்டிலுள்ள இரு புள்ளிகள் கொடுக்கப்பட்டிருப்பின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

கொடுக்கப்பட்டுள்ள புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனக் கொண்டு AB கோட்டின் சமன்பாடு காண்போம். AB-யின் சரிவு m எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ A வழிச்செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = m(x-x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

அக்கோடு $B(x_2, y_2)$ வழிச் செல்வதால்

$$y_2-y_1 = m(x_2-x_1)$$

$$\therefore \quad m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}.$$

m-மின் மதிப்பைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடின்

$$y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

எனவே AB கோட்டின் சமன்பாடு

$$y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

$$(\text{அ - து}) \quad \frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}.$$

குறிப்பு : (x_1, y_1), (x_2, y_2) என்ற புள்ளிகள் வழிச்செல்லும் நேர்க்கோட்டின் சரிவு $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

2·11. சமச்சீர் வடிவம் (Symmetric Form)

பத்தி 2·9-இல் $A(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சரிவு $m = \tan\theta$ எனில் அதன் சமன்பாடு $y-y_1 = m(x-x_1)$ எனக் கண்டோம்.

படம் 19-இல் [பத்தி 2·9], $AP = r$ எனில்

$AN = r\cos\theta$, $NP = r\sin\theta$

(அ - து) $x-x_1 = r\cos\theta$, $y-y_1 = r\sin\theta$

$$\therefore \quad \frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r.$$

சமன்பாட்டின் இவ் வடிவம் சமச்சீர் வடிவம் எனப்படும்.

θ சாய்வுடன் $A(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு A-யிலிருந்து உள்ள தூரம் r ஆகும்.

மாதிரி 7 : $A(4, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு x ஆயத் துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் $135°$. அக் கோடு $3x - y = 0$ என்ற கோட்டை B-யில் வெட்டினால் AB-யின் நீளத்தைக் காண்க.

AB-யின் நீளம் r எனக் கொள்க.

$A(4, 1)$ வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-4}{\cos 135} = \frac{y-1}{\sin 135} = r$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x-4}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{y-1}{+\frac{1}{\sqrt{2}}} = r$$

$$\therefore \quad x = 4 - \frac{r}{\sqrt{2}}, \; y = 1 + \frac{r}{\sqrt{2}}$$

எனவே B-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}, \; 1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$

புள்ளி B, $3x - y = 0$ கோட்டின் மீதுள்ளதால்

$$3\left(4 - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) - \left(1 + \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\therefore \quad -\frac{4r}{\sqrt{2}} + 11 = 0$$

$$\therefore \quad r = \frac{+11\sqrt{2}}{4}$$

எனவே AB-யின் நீளம் $\frac{11\sqrt{2}}{4}$

2·12. நேர்க்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு (Standard Equation)

$Ax + By + C = 0$ என்ற சமன்பாடு எப்பொழுதும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் நியமப்பாதையில் (Locus) (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்பவை எவையேனும் மூன்று புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad Ax_1 + By_1 + C = 0$$
$$Ax_2 + By_2 + C = 0$$
$$Ax_3 + By_3 + C = 0$$

இச் சமன்பாடுகளை முறையே $(y_2 - y_3)$, $(y_3 - y_1)$, $(y_1 - y_2)$ என்பவையால் பெருக்கிப் பின் கூட்டினுல்

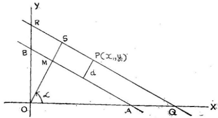
$A\,[x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2)] = 0$ ஆகும்.

$A \neq 0$. $\therefore x_1 (y_2 - y_3) + x_2 (y_3 - y_1) + x_3 (y_1 - y_2) = 0$. (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்ற புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்புப் பூச்சியமாகும்.

எனவே, அம் மூன்று புள்ளிகளும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமைந்துள்ளன. (அ - து) $Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் நியமப் பாதையின் மீதுள்ள யாதேனும் மூன்று புள்ளிகள் ஒரே நேர்க் கோட்டிலமையும்.

$\therefore$ $Ax + By + C = 0$ எப்பொழுதும் ஒரு நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

2·13. $Ax + By + C = 0$ **கோட்டிற்கு** $P\,(x_1, y_1)$ **புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்.**



படம் 20.

$Ax + By + C = 0$ குறிக்கும் கோடு AB எனவும், $P(x_1, y_1)$ வழி AB-க்கு இணையாகச் செல்லும் கோடு QR எனவும் கொள்வோம்.

AB-க்குச் செங்குத்தாக ஆதியிலிருந்து வரையும் கோடு AB-ஐ M-யிலும், QR-ஐ S-யிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்க.

$OS = p'$, $OM = p$, $\angle XOM = \alpha$ என்போம்.

$\therefore$ AB-யின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ ஆனால் AB-யின் சமன்பாடு, $Ax + By + C = 0$.

$$\therefore \quad \frac{\cos \alpha}{A} = \frac{\sin \alpha}{B} = \frac{-p}{C} = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\therefore \quad \cos \alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2+B^2}},$$

$$-p = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}.$$

மேலும் QR-யின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p' = 0$. இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்வதால் $x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p' = 0$.

$$\therefore \quad p' = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$$

P-யிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் d எனின்,

$$\begin{aligned} d &= OS - OM = p' - p \\ &= x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha - p \\ &= \frac{Ax_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{By_1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} + \frac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \end{aligned}$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}} \text{ ஆகும்.}$$

கிளை : ஆதியிலிருந்து $Ax + By + C = 0$ கோட்டிற்கு உள்ள தூரம் $\dfrac{C}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$.

குறிப்பு : ஆதியும், (x_1, y_1) புள்ளியும் கோட்டிற்கு எதிர் பக்கங்களிலிருப்பின் d நேர் மதிப்பும், கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்தி லிருந்தால் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும். ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் நேர் மதிப்புடையது.

மாதிரி 8 : $(-3, -4)$ புள்ளியிலிருந்து $3x + 4y - 10 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

$$\text{நீளம் } d = \frac{3(-3) + 4(-4) - 10}{+\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{-35}{5} = -7$$

∴ செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் 7

$d < 0$ ஆதலால் ஆதியும், $(-3, -4)$ புள்ளியும் நேர் கோட்டிற்கு ஒரே பக்கத்திலுள்ளது.

மாதிரி 9 : $(2, 3)$ புள்ளியிலிருந்து $5x - 12y + 3 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

$$\text{நீளம் } d = \frac{5(2) - 12(3) + 3}{-\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{-23}{-13} = \frac{23}{13}$$

∴ செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \frac{23}{13}$.

$d > 0$ ஆதலால் ஆதியும் $(2, 3)$ புள்ளியும் கோட்டின் எதிர் பக்கங்களிலிருக்கும்.

பயிற்சி 2.1.

1. y ஆயத்தில் 4 அலகு வெட்டுத்துண்டு ஏற்படுத்தும் ஒரு நேர்க்கோடு x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் $-60°$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
2. y ஆயத்தில் -3 அலகு வெட்டுத்துண்டு ஏற்படுத்தும் ஒரு கோடு x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் $135°$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.
3. பின்வரும் கோடுகளின் சரிவையும், y வெட்டுத்துண்டு களையும் காண்க :

(i) $3x + 2y - 9 = 0$ (ii) $3x + 6y - 7 = 0$
(iii) $3x - 2y - 3 = 0$ (iv) $6x = 7y + 12$

4. $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 4$, $y = \sqrt{3}\,x + 3$ கோடுகள் x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்களைக் காண்க. இக்கோடுகளுக் கிடைப்பட்ட கோணம் யாது ?

5. ஒரு நேர்க்கோடு x, y ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் முறையே 3, 4 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

6. ஒரு கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள் $5, -4$ எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு என்ன ?

7. $(1, -6)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க்கோடு ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகளின் பெருக்குத் தொகை 8 எனின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

8. ஒரு கோடு x ஆயத்தை A புள்ளியிலும், y ஆயத்தை B புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. AB-யின் நடுப்புள்ளி $(-2, -4)$ எனின் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

9. இரண்டு ஆயங்களுக்கிடையேயுள்ள ஒரு நேர்க் கோட்டின் பகுதியை $(4, -3)$ புள்ளி $4 : 5$ விகிதத்தில் பிரித்தால் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

10. ஒரு கோட்டிற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p. செங்குத்துக்கோடு x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் α எனில், பின்வரும் கோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

    (i) $p = 2, \ \alpha = 45°$

    (ii) $p = 3, \ \alpha = 150°$

11. பின்வரும் சமன்பாடுகளைச் செங்குத்து வடிவில் எழுதி p, α காண்க.

    (i) $x + y - \sqrt{2} = 0$

    (ii) $x + y - 2\sqrt{2} = 0$

    (iii) $\sqrt{3}x - y + 6 = 0$.

12. $2x + ky - 5 = 0$ என்ற கோடு $(1, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லின் k-யின் மதிப்புக் காண்க.

13. $(-4, -3)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சரிவு 2 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

14. $A(-2, 5)$, $B(3, -4)$, $C(7, 10)$ எனின் $\triangle ABC$-யின் பக்கங்கள், மையக்கோடுகள் ஆகியவைகள் தம் சமன் பாடுகளைக் காண்க.

15. கீழ்க்கண்ட புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன் பாட்டையும், சரிவையும் காண்க.

(i) $(0, 0)$, $(5, 8)$; (ii) $(6, 0)$, $(0, 4)$;
(iii) $(-5, 2)$, $(-4, 2)$.

16. $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$ என்ற கோடு ஆயங்களை A, B புள்ளிகளில் வெட்டினால், AB-யின் நடுப்புள்ளி யின் இயங்கு வழிக் காண்க. (p ஒரு மாறிலி).

17. $3x - 2y + 7 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக $(1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

18. $2x - 3y + 3 = 0$ கோடு, $P(t+1, t)$ புள்ளி வழிச் சென்றால், t-யின் மதிப்புக் காண்க. P-யின் ஆயத் தொலைகள் யாவை?

19. $(1, -3)$, $(-1, -5)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை $(7, 3)$ புள்ளி பிரிக்கும் விகிதம் என்ன?

20. $(-3, 1)$ புள்ளியிலிருந்து $3x - 4y - 2 = 0$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் காண்க.

21. $(2, -8)$ புள்ளியிலிருந்து $4x + 3y + 9 = 0$ கோட்டிற்கு உள்ள தூரம் காண்க.

22. $3x + 4y - 12 = 0$, $3x + 4y - 3 = 0$ கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள தூரம் காண்க.

23. $3x - y + 4 = 0$, $3x - y + 2 = 0$ கோடுகளுக் கிடையேயுள்ள தூரம் காண்க.

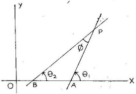
24. $5x + 7y - 20 = 0$ கோட்டிற்கு $(2, 3)$, $(1, 2)$ புள்ளி களிலிருந்து உள்ள தூரங்களைக் காண்க. இருபுள்ளி களும் அக்கோட்டிற்கு இருபக்கங்களிலுமுள்ளன என நிறுவுக.

25. $(1, -3)$ புள்ளி, $4x + 7y - 18 = 0$ கோட்டிற்குக் கீழுள்ளது என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\sqrt{3}x+y-4=0$. 2. $x+y+8=0$. 3. (i) $m=-\frac{3}{2}$; $c=\frac{9}{2}$. (ii) $m=-\frac{1}{2}$; $c=\frac{7}{6}$. (iii) $m=4$; $c=-\frac{3}{2}$. (iv) $m=\frac{6}{7}$; $c=-\frac{12}{7}$. 4. $30°, 60°, 30°$. 5. $4x+3y=12$. 6. $4x-5y=20$. 7. $2x+y+4=0$; $18x+y-12=0$. 8. $2x+y+8=0$. 9. $15x-16y=108$. 10. (i) $x+y=2\sqrt{2}$. (ii) $\sqrt{3}x-y+6=0$. 11. (i) $p=1$; $\alpha=45°$. (ii) $p=2$; $\alpha=45°$. (iii) $p=3$; $\alpha=150°$. 12. 3. 13. $2x-y+5=0$. 14. பக்கங்கள்: $9x+5y=7$, $7x-2y=29$, $5x-9y+55=0$. மையக்கோடுகள்: $2x+7y=31$, $15x+y=41$, $19x-18y=3$. 15. (i) $3x-5y=0$, $m=\frac{3}{5}$. (ii) $2x+3y-12=0$, $m-\frac{2}{3}$. (iii) $y-2=0$, $m=0$. 16. $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{4}{p^2}$. 17. $3x-2y+1=0$. 18. $t=5$, $(6, 5)$. 19. $3:4$. 20. -5. 21. $-\frac{8}{5}$. 22. $\frac{9}{5}$. 23. $\frac{2}{\sqrt{10}}$.

2·14. இரு கோடுகளுக்கிடைப்பட்ட கோணம்



படம் 21.

$$y = m_1x + c_1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$
$$y = m_2x + c_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் குறிக்கும் கோடுகள் முறையே PA PB எனக் கொள்வோம். கோடுகள் (1), (2) x அச்சுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் முறையே θ_1, θ_2 எனில்,

$$m_1 = \tan\theta_1,\ m_2 = \tan\theta_2$$

அக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனில்,

$$\angle BPA = \phi = \theta_1 - \theta_2$$

$$\therefore\ \tan\phi = \tan(\theta_1-\theta_2) = \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1+\tan\theta_1\tan\theta_2}$$

$$(\text{அ-து})\ \tan\phi = \frac{m_1-m_2}{1+m_1 m_2}$$

$$\therefore\ \phi = \tan^{-1}\left[\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right]$$

குறிப்பு : இரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் குறுங் கோணமெனின் $\tan\phi$ நேர் மதிப்பும், விரி கோணமெனின் அஃது எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

கிளை 1 : இவ்விரு கோடுகளும் இணைகோடுகளெனின் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் $\phi = 0$. $\therefore \tan\phi = 0$. எனவே, $m_1 = m_2$. (அ-து) இணையாகச் செல்லும் கோடுகளின் சரிவுகள் சமம்.

கிளை 2 : இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்துக் கோடுகளெனின் இவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் $\phi = 90°$.

$\therefore\ \tan\phi = \infty$. எனவே $m_1 m_2 = -1$.

(அ-து) தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் இரு கோடுகளின் சரிவுகள் தம் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

2·15. $a_1x + b_1y + c_1 = 0,\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$

என்பவை இணையாகச் செல்லும் இரு கோடுகளெனில் அவற்றின் சரிவுகள் சமம்.

$$\therefore\ \frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2} \quad (\text{அ-து})\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}.$$

இவ்விரு கோடுகளும் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளுமெனில் இவைகள் தம் சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை -1.

$$\therefore \left(\frac{-a_1}{b_1}\right)\left(\frac{-a_2}{b_2}\right) = -1$$

(அ-து) $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

குறிப்பு : இரு கோடுகளின் சமன்பாட்டில் எண்ணுறுப்பு மட்டும் வேறுபடின், அவை இணைகோடுகளாகும்.

$$ax + by + c = 0, \ ax + by + d = 0$$

என்பவை இரண்டு இணைகோடுகளின் சமன்பாடுகளாகும்.

$ax + by + c = 0$, $bx - ay + d = 0$ கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாக இருக்கும்.

மாதிரி 10: $4x-3y = 10$ கோட்டிற்கிணையாக (2,3) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$4x-3y = 10$ கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x-3y = K \text{ ஆகும்.}$$

இது (2, 3) வழிச் செல்லின்,

$$4(2)-3(3) = K$$

$$\therefore K = 1.$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு

$$4x-3y + 1 = 0.$$

மாதிரி 11 : $4x-3y = 10$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$4x-3y = 10$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோடு

$$3x + 4y = K \text{ ஆகும்.}$$

இது (2, 3) வழிச் செல்லின் $3(2) + 4(3) = K$

$$\therefore K = 18$$

எனவே கோட்டின் சமன்பாடு $3x + 4y-18 = 0$.

2·16. இரு கோடுகள் சந்திக்கும் புள்ளி :

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

என்ற இரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளி இரு கோடுகளுக்கும் பொதுவான புள்ளியாதலால் அக் கோடுகளின் சமன்பாடுகளுக்கும் $(x_1\ y_1)$ பொருந்தும்.

$$\therefore\ a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 = 0$$
$$a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 = 0$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி

$$\frac{x_1}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y_1}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ y_1 = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

குறிப்பு : $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (அ-து) $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ எனில் அவ் விரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கந்தழியிலிருக்கும். இக் கட்டுப் பாட்டுக்குட்பட்ட இரு கோடுகள் இணை கோடுகள் எனப் பத்தி 2·15-இல் கண்டோம். எனவே இணை கோடுகள் கந்தழியில் (Infinity) வெட்டும்.

2·17. மூன்று கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லத் தேவையான கட்டுப்பாடு.

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots \quad (2)$$
$$a_3x + b_3y + c_3 = 0 \qquad \ldots \quad (3)$$

என்பவை மூன்று கோடுகள் எனக் கொள்வோம்.

கோடுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி,

$$\left[\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1},\ \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right]$$

கோடு (3) இப் புள்ளி வழிச் செல்லின்

$$a_3\left(\frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + b_3\left(\frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}\right) + c_3 = 0$$

(அ-து) $a_3\,(b_1c_2 - b_2c_1) + b_3\,(c_1a_2 - c_2a_1) + c_3\,(a_1b_2 - a_2b_1) = 0.$

மாதிரி 12 : $2x-3y = 7$, $3x-4y = 13$, $8x-ky = 33$ என்ற கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லின் k-யின் மதிப்பு என்ன ?

$$2x-3y = 7,\ 3x-4y = 13$$

என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (11, 5).

$8x-ky = 33$ இப் புள்ளி வழிச் செல்லின்

$$8(11)-k(5) = 33$$

$$88-33 = 5k \quad \therefore \quad k = 11.$$

2·18. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்.

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0 \qquad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

(1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$x\,(a_1 + \lambda\, a_2) + y\,(b_1 + \lambda\, b_2) + (c_1 + \lambda\, c_2) = 0$$

இது $Ax + By + C = 0$ வடிவிலிருப்பதால் (1) ஒரு நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

மேலும் $(x_1\ y_1)$ என்ற புள்ளி

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0\ ;\ a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி எனில்

$$a_1x_1 + b_1y_1 + c_1 = 0$$

$$a_2x_1 + b_2y_1 + c_2 = 0$$

$$\therefore\ (a_1x_1 + b_1y_1 + c) + \lambda\,(a_2x_1 + b_2y_1 + c_1) = 0$$

(அ - து) $(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ என்னும் சமன்பாடு (x_1y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும்.

எனவே $a_1x + b_1y + c_1 = 0$, $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு.

$$(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda\,(a_2x + b_2y + c_2) = 0$$

இங்கு λ என்பது ஒரு மாறிலியாகும்.

மாதிரி 13 : $3x-4y=7$, $12x+5y=13$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு $2x-3y+5=0$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளதெனின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$$3x-4y-7=0, \quad 12x+5y-13=0$$

கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு

$$(3x-4y-7)+\lambda(12x+5y-13)=0 \qquad (1)$$

(அ-து) $x(3+12\lambda)+y(-4+5\lambda)+(-7-13\lambda)=0$.

இக் கோட்டின் சரிவு $-\dfrac{3+12\lambda}{5\lambda-4}$

$2x-3y+5=0$-த்தின் சரிவு $\dfrac{-2}{-3}=\dfrac{2}{3}$.

$$\therefore \left(-\frac{12\lambda+3}{5\lambda-4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)=-1$$

எனவே, $2(12\lambda+3)-3(5\lambda-4)=0$

$$24\lambda+6-15\lambda+12=0$$

$$9\lambda+18=0 \quad \therefore \quad \lambda=-2.$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்

$$(3x-4y-7)-2(12x+5y-13)=0$$

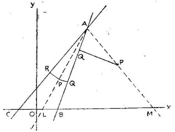
(அ-து) $21x+14y-19=0$.

2·19. இரு கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காணல்.

இரு கோடுகள் AB, AC எனவும், அவைகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$a_1x+b_1y+c_1=0$$

$a_2x+b_2y+c_2=0$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 22.

AL, AM முறையே கோணம் BAC-யின் உள்ளிரு, வெளியிரு சம வெட்டிகளாகக் கொள்வோம்.

சம வெட்டிகள் மீது P யாதேனும் ஒரு புள்ளி. P-யிலிருந்து கோடுகள் (1), (2) மீது PQ, PR என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும்.

$$\triangle PAR \equiv \triangle PAQ$$

$$\therefore \quad PQ = PR$$

P-யின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனில், PQ, PR என்ற கோடுகளின் நீளங்களின் எண் மதிப்புக்கள்

$$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}, \quad \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

இவைகளிரண்டும் சமம்.

எனவே $$\frac{a_1x_1 + b_1y_1 + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x_1 + b_2y_1 + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி (அ-து) உள்ளிரு, வெளியிரு, சமவெட்டிகளின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

c_1, c_2 இரண்டும் ஒரே குறியைக் கொண்டுள்ளன எனக் கொள்வோம். (இரண்டும் மாறுபட்ட குறிகளைக் (signs) கொண்டிருப்பினும் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்குமாறு சமன்பாடுகளை மாற்றி எழுதலாம்).

ஆதியை உள்ளடக்கிய கோணத்தின் இரு சம வெட்டி மீது P புள்ளி இருப்பின், P புள்ளியும் ஆதியும் அக் கோடுகளுக்கு ஒரே பக்கத்திலிருக்கும். எனவே PQ, PR இரண்டும் ஒரே குறியைக் கொண்டிருக்கும். எனவே அச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = + \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

P பிறிதொரு சம வெட்டியின் மீதிருப்பின் PQ, PR இரண்டும் மாறுபட்ட குறிகளைக் கொண்டிருக்கும். எனவே அச் சமவெட்டியின் சமன்பாடு

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = - \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}.$$

மாதிரி 14. $12x + 5y - 4 = 0$, $3x + 4y + 7 = 0$ என்ற கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காண்க.

கோடுகள் $12x + 5y - 4 = 0$

$$-3x - 4y - 7 = 0$$

∴ ஆதியை உள்ளடக்கிய கோணத்தின் இரு சம வெட்டி

$$\frac{12x + 5y - 4}{\sqrt{144 + 25}} = \frac{-3x - 4y - 7}{\sqrt{9 + 16}}$$

இதைச் சுருக்கின் $99x + 77y + 71 = 0$ என்றாகும்.

பிறிதொரு சமவெட்டி

$$\frac{12x + 5y - 4}{\sqrt{144 + 25}} = - \frac{-3x - 4y - 7}{\sqrt{9 + 16}}$$

இதைச் சுருக்கின் $7x - 9y - 37 = 0$ என்றாகும்.

எனவே இரு சமவெட்டிகளின் சமன்பாடுகள்

$$99x + 77y + 71 = 0$$
$$7x - 9y - 37 = 0.$$

பயிற்சி 2.2.

1. $y = \frac{x}{\sqrt{3}} - 4$, $y = \sqrt{3}x + 3$ என்ற இரு கோடுகள் x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்களைக் காண்க. அவ்விரு கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் என்ன ?

2. $y = (2 - \sqrt{3})x + 5$, $y = (2 + \sqrt{3})x - 7$ என்ற கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் என்ன ?

3. $5x + 6y - 18 = 0$, $18x - 5y = 81$ என்ற கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளும் என நிறுவுக.

4. $5x + 8y - 9 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக $(2, 3)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

5. $3x - 8y = 21$ கோட்டிற்கு இணையாகச் செல்லும் ஒரு கோடு x ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டின் அளவு -7 எனில் அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

6. $(2, 5)$ புள்ளி வழி $2x + 5y + 31 = 0$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

7. $5x - y = 9$, $x + 6y - 8 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியை $(3, 4)$ புள்ளியுடன் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

8. $2x - 3y + 4 = 0$, $3x + 4y - 5 = 0$, கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு $6x - 7y + 8 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக உள்ளதெனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x + 3y - 1 = 0$, $x - 2y + 4 = 0$ கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழியாகச் செல்லும் கோடு $3x + 4y = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக இருக்கிறதெனில் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

10. $3x + y - 2 = 0$, $ax + 2y - 3 = 0$, $2x - y - 2 = 0$ கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லுமெனின் a-யின் மதிப்பு என்ன ?

11. a-யின் எம்மதிப்பிற்கு $x - 6y + a = 0$, $2x + 3y + 4 = 0$, $x + 4y + 1 = 0$ கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச்செல்லும்?

12. $x + 2y = 0$, $4x + 3y = 5$, $3x + y = 0$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சந்தியையும் (orthocentre), மையக்கோட்டுச் சந்தியையும் (centroid) காண்க.

13. ஆதியிலிருந்து ஒரு கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி $(3, -4)$ எனில், அக்கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

14. $11x + 7y - 9 = 0$ என்ற கோட்டை மூலை விட்டமாகக் கொண்ட ஓர் இணைகரத்தின் அடுத்தடுத்த இரு பக்கங்கள் $4x + 5y = 0$, $7x + 2y = 0$ எனில் மற்றப் பக்கங்களையும், மூலை விட்டத்தையும் காண்க.

15. $(-4, 10)$, $(4, -10)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் மையக்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

16. AB என்ற கோட்டின் சரிவு $\frac{2}{3}$. அதன் y வெட்டுத் துண்டு 2. AB-க்குச் செங்குத்தாக $(-4, 21)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க. இவ்விரு கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி யாது? AB கோட்டிலிருந்து $(-4, 21)$ புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் காண்க.

17. ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக் கோடுகள் (altitudes) ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

18. ஒரு முக்கோணத்தின் மையக் குத்துக் கோடுகள் (perpendicular bisectors) ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

19. (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு $y = mx + c$ கோட்டுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(m)$ எனின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

20. $x \sec\theta + y \operatorname{cosec}\theta = a$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ள கோடு $(a\cos^3\theta, a\sin^3\theta)$ புள்ளி வழிச் செல்லின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

21. $yy_1 = 2a(x + x_1)$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ள ஒரு கோடு (x_1, y_1) வழிச் செல்லின் அக் கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

22. $ax+by+c=0$, $lx+my+n=0$, $px+qy+r=0$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சந்தி வழிச் செல்லும் கோடு $\frac{ax+by+c}{ap+bq} = \frac{lx+my+n}{lp+mq}$ என நிறுவுக.

23. $ax+by+c=0$, $ax+by+c'=0$, $a_1x+b_1y+c=0$, $a_1x+b_1y+c_1=0$ என்ற கோடுகளால் அமையும் இணை

கரத்தின் மூலை விட்டங்கள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் $a^2+b^2=a_1{}^2+b_1{}^2$ என நிறுவுக.

24. $4y-3x=1$, $3y-4x+1=0$, $4y-3x=3$, $3y-4x+2=0$ கோடுகளாலமையும் இணைகரத்தின் பரப்புக் காண்க.

25. $3x+4y=7a$, $3x+4y=7b$, $4x+3y=7c$, $4x+3y=7d$ என்ற கோடுகளாலமையும் இணைகரத்தின் பரப்புக் காண்க.

26. $3x-4y+7=0$, $12x-5y=8$ கோடுகளின் இடையே யுள்ள கோணத்தின் சமவெட்டிகளைக் காண்க.

27. $3x+4y=6$, $12x-5y=3$, $4x-3y+12=0$ பக்கங்களைக் கொண்ட முக்கோணத்தின் உள்வட்டமையம் (incentre) காண்க.

28. $3x+4y-6=0$, $12x-5y-3=0$, $4x-3y+12=0$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உள்ளிரு சமவெட்டிகளைக் காண்க.

29. ஒரு முக்கோணத்தின் கோணங்களின் உள்ளிரு சம வெட்டிகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

30. $x=0$, $y=0$, $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் உள்வட்ட மையம் காண்க.

விடைகள்

1. $30°, 60°, 90°$. 2. $60°$. 4. $5x+8y=34$. 5. $3x-8y+21=0$. 6. $5x-2y=0$. 7. $3x-y-5=0$. 8. $102x-119y+160=0$. 9. $3x+4y+2=0$. 10. 5. 11. 5. 12 $(-4, -3)$; $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 13. $3x-4y-25=0$. 14. $7x+2y-9=0$, $4x+5y-9=0$, $x-y=0$. 15. $2x-5y=0$. 16. $3x+2y=30$; $(6, 6)$; $65\sqrt{13}$. 19. $(1-m^2)(y-y_1)=2m(x-x_1)$; $y=y_1$. 20. $x\cos\theta - y\sin\theta = a\cos 2\theta$. 21. $2a(y-y_1)+y_1(x-x_1)=0$. 24. $\frac{2}{7}$. 25. $7(a-b)(c-d)$. 26. $99x-77y+51=0$; $21x+27y-131=0$. 27. $\left(\frac{11}{48}, \frac{125}{48}\right)$. 28. $33x+9y-31=0$, $112x-64y+141=0$, $7y-x=18$. 30. $(1, 1)$.

3. இரட்டைக் கோடுகள்

(Pairs of Straight lines)

3·1. n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு (Homogeneous Equation of degree n) ஆதிவழிச் செல்லும் n கோடுகளைக் குறிக்கும்.

n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு,

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1}x + \ldots\ldots + a_{n-1} y x^{n-1} + a_n x^n = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இரு பக்கமும் x^n ஆல் வகுக்க,

$$a_0 \frac{y^n}{x^n} + a_1 \frac{y^{n-1}}{x^{n-1}} + \ldots\ldots + a_{n-1} \frac{y}{x} + a_n = 0$$

$$(\text{அ-து})\ a_0 \left(\frac{y}{x}\right)^n + a_1 \left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} + \ldots\ldots$$

$$+ a_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + a_n = 0. \quad \ldots \quad (2)$$

இது $\left(\frac{y}{x}\right)$ மாறியில் n படிச் சமன்பாடு ஆதலால் n தீர்வுகள் கொண்டிருக்கும். அவைகள் $m_1, m_2, \ldots\ldots, m_n$ எனில் (2)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$a_0 \left(\frac{y}{x} - m_1\right)\left(\frac{y}{x} - m_2\right) \ldots\ldots \left(\frac{y}{x} - m_n\right) = 0$$

$$(\text{அ-து})\quad a_0 (y - m_1 x)(y - m_2 x) \ldots\ldots (y - m_n x) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$\therefore\quad y - m_1 x = 0,\ y - m_2 x = 0,\ \ldots\ldots,\ y - m_n x = 0.$$

இவை ஒவ்வொன்றும் ஆதி வழிச் செல்லும் ஒரு நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

எனவே n படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆதி வழிச் செல்லும் n நேர்க் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

3·2. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடு ஆதி வழிச் செல்லும் இரு நேர்க் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b\left(y^2 + \frac{2h}{b}xy + \frac{a}{b}x^2\right),\ b \neq 0$$

$$= b\,(y - m_1x)\,(y - m_2x) \quad \dots \quad (1)$$

எனவே கோடுகளின் தனித் தனிச் சமன்பாடு

$y - m_1x = 0,\ y - m_2x = 0$ ஆகும்.

மேலும்,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b\,[y^2 - (m_1 + m_2)\,xy + m_1m_2x^2] \quad (2)$$

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} = -\frac{xy\text{-இன் கெழு}}{y^2\text{-இன் கெழு}}$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{b} = \frac{x^2\text{-இன் கெழு}}{y^2\text{-இன் கெழு}}$$

பிறிதொரு முறை

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ சமன்பாட்டை y-இல் இருபடிச் சமன்பாடாகக் கொண்டால்,

$$y = \frac{-h \pm \sqrt{h^2 - ab}}{b}\,x$$

இச்சமன்பாடுகளிரண்டும் ஆதி வழிச்செல்லும் இருகோடுகளைக் குறிக்கும்.

$h^2 - ab < 0$, எனில் இரண்டும் கற்பனைக் கோடுகள் (imaginary lines).

$h^2 - ab = 0$ எனில், இவை இரண்டும் ஒன்றுபடும் கோடுகள் (coincident lines).

$h^2 - ab > 0$ எனில், இரண்டும் மெய்யான கோடுகள் (real lines).

3·3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரு கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் காணல்.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$$

குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0 \text{ எனில்,}$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}, \quad m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனின்,

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1 m_2}}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\pm\sqrt{\dfrac{4h^2}{b^2} - \dfrac{4a}{b}}}{1 + \dfrac{a}{b}}$$

$$= \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

$$\therefore \tan\phi = \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

மிகைக்குறி (positive sign) கோடுகளின் இடையேயுள்ள குறுங் கோணத்தையும், குறைக் குறி (negative sign) விரிகோணத்தையும் கொடுக்கும்.

கிளை 1. $h^2 - ab = 0$ எனில், $\tan\phi = 0$. $\therefore \phi = 0$. எனவே கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம் பூச்சியம். இரு கோடுகளும் ஆதிவழிச் செல்பவை யாதலின் இரண்டும் ஒன்றுபடும் கோடுகளாகும்.

கிளை 2. $a + b = 0$ எனில், $\tan\phi = \infty$. $\therefore \phi = 90°$. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை.

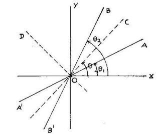
3·4. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காணல்.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் AOA', BOB' எனக்கொள்வோம். இவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனில்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b}$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b}.$$

இக்கோடுகள் x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் θ_1, θ_2 எனில், $m_1 = \tan\theta_1$, $m_2 = \tan\theta_2$.



படம் 28.

அக் கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சம வெட்டிகள் OC, OD எனக் கொள்வோம். இவை x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் θ எனில்,

$$\theta = \angle XOC \text{ (அ-து) } \angle XOD$$

$$\angle XOC = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\angle XOD = \theta_1 + \frac{\theta_2 - \theta_1}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi + \theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\therefore \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \quad (\text{அ-து}) \quad \frac{\pi + \theta_1 + \theta_2}{2}$$

$$\therefore \quad 2\theta = \theta_1 + \theta_2 \quad (\text{அ-து}) \quad \pi + \theta_1 + \theta_2$$

எனவே $\tan 2\theta = \tan(\theta_1 + \theta_2)$.

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta} = \frac{\tan\theta_1 + \tan\theta_2}{1 - \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_1 + m_2}{1 - m_1 m_2} = \frac{2h}{a - b}. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$P(x, y)$ என்பது OC அல்லது OD என்ற இரு சமவெட்டியின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$\tan\theta = \frac{y}{x}.$$

$\therefore$ சமன்பாடு (1)

$$\frac{2\frac{y}{x}}{1 - \frac{y^2}{x^2}} = \frac{2h}{a-b} \text{ என் றுரும்.}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{2xy}{x^2 - y^2} = \frac{2h}{a-b} \quad (\text{அ-து}) \quad \frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}$$

எனவே இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h}.$$

பிறிதொரு முறை

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $y - m_1 x = 0$, $y - m_2 x = 0$ எனில் $m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b}$, $m_1 m_2 = \frac{a}{b}$.

இரு சம வெட்டியின் மீதுள்ள புள்ளியிலிருந்து அக் கோடு களுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் எண்ணளவு சமமாதலின்,

$$\frac{y - m_1 x}{\sqrt{1 + m_1^2}} = \pm \frac{y - m_2 x}{\sqrt{1 + m_2^2}}.$$

இதில் மிகைக் குறி ஒரு சம வெட்டியையும், குறைத்தற் குறி பிறிதொரு சம வெட்டியையும் குறிக்கும்.

இரண்டு பக்கங்களையும் வர்க்கப்படுத்த,

$$\frac{(y-m_1x)^2}{1+m_1^2} = \frac{(y-m_2x)^2}{1+m_2^2}.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$(1+m_2^2)(y-m_1x)^2 = (1+m_1^2)(y-m_2x)^2$$

$$\therefore\ x^2[m_1^2(1+m_2^2)-m_2^2(1+m_1^2)]$$
$$-2xy[m_1(1+m_2^2)-m_2(1+m_1^2)]$$
$$+y^2[(1+m_2^2)-(1+m_1^2)]=0$$

$$x^2(m_1^2-m_2^2)-2xy\{(m_1-m_2)(1-m_1m_2)\}$$
$$+y^2(m_2^2-m_1^2)=0.$$

(அ-து) $(m_1-m_2)[x^2(m_1+m_2)-2xy(1-m_1m_2)$
$-y^2(m_1+m_2)]=0.$

$m_1-m_2 \neq 0.\ \therefore (x^2-y^2)(m_1+m_2)-2xy(1-m_1m_2)=0.$

$$(x^2-y^2)\left(-\frac{2h}{b}\right)-2xy\left(1-\frac{a}{b}\right)=0$$

$$\therefore\ (x^2-y^2)\,h = xy(a-b)$$

(அ-து) $\dfrac{x^2-y^2}{a-b} = \dfrac{xy}{h}.$

எனவே, கோணச் சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2-y^2}{a-b} = \frac{xy}{h}.$$

மாதிரி 1: $33x^2-71xy-14y^2=0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் காண்க. இவைகளின் இடையேயுள்ள கோணம் என்ன?

$33x^2-71xy-14y^2=(11x+2y)(3x-7y)$. எனவே, கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள்

$$11x+2y=0,\quad 3x-7y=0.$$

இடையேயுள்ள கோணம் ϕ எனில், $\tan\phi = \dfrac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b}$

$$\therefore \tan\phi = \frac{\pm 2\sqrt{\left(-\frac{71}{2}\right)^2 - 33(-14)}}{33 + (-14)}$$

$$= \frac{\sqrt{5041 + 1848}}{19} = \frac{\sqrt{6889}}{19}$$

$$= \frac{83}{19}$$

$\therefore$ இடையேயுள்ள கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{83}{19}\right)$.

மாதிரி 2 : $x^2 + 2xy \sec\alpha + y^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் மெய்யானவை என்றும், அவற்றின் இடைப்பட்ட கோணம் α என்றும் நிறுவுக.

$$h^2 - ab = \sec^2\alpha - 1 = \tan^2\alpha \geq 0$$

எனவே கோடுகள் மெய்யானவை.

அக் கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் ϕ எனில்

$$\tan\phi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a+b} = \frac{2\tan\alpha}{2} = \tan\alpha \quad \therefore \quad \phi = \alpha.$$

மாதிரி 3 : λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2) = 0$ எனும் கோடுகள் அதே சமவெட்டிகள் (same bisectors) கொண்டுள்ளன என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + \lambda(x^2 + y^2) = 0$$

(அ-து) $x^2(a + \lambda) + 2hxy + y^2(b + \lambda) = 0 \quad \ldots (1)$

இதன் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{x^2 - y^2}{(a+\lambda) - (b+\lambda)} = \frac{xy}{h}$$

(அ-து) $\dfrac{x^2 - y^2}{a - b} = \dfrac{xy}{h} \quad \ldots \quad \ldots (2)$

இது λ சார்பற்ற சமன்பாடாதலின், λ-வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (1)-இன் கோணச் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{x^2 - y^2}{a - b} = \frac{xy}{h} \quad \text{ஆகும்.}$$

மாதிரி 4 : $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும், $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும் பொருந்தும் கோடுகள். மற்ற இரு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்ளுமெனில்,

$$\frac{ha_1b_1}{b_1 - a_1} = \frac{h_1ab}{b - a} = \frac{1}{2}(\sqrt{-aba_1b_1})$$

என நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் $y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனின்,

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$m_1 m_2 = \frac{a}{b} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் $y - m_3x = 0$, $y - m_4x = 0$ எனின்,

$$m_3 + m_4 = -\frac{2h_1}{b_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$m_3 m_4 = \frac{a_1}{b_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

கொடுத்துள்ள நிபந்தனை $m_1 = m_3$ ... ... (5)

எனக் கொள்வோம்.

மேலும், $m_2m_4 = -1$ ... ... (6)

(2), (3), (5) சமன்பாடுகளை இணைத்து

$$m_3\left(-\frac{1}{m_4}\right) = \frac{a}{b} \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

(4)-இன் படி $m_3m_4 = \dfrac{a_1}{b_1}$ ... ... (8)

(7), (8)-ஐப் பெருக்க.

$$m_3^2 = -\frac{aa_1}{bb_1} = -\frac{aba_1b_1}{b^2b_1^2}$$

$$\therefore \quad m_3 = \frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{bb_1}$$

இதை (4)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{bb_1}\, m_4 = \frac{a_1}{b_1}$$

$$\therefore \quad m_4 = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{bb_1}{\sqrt{-aa_1bb_1}} = \frac{a_1b}{\sqrt{-aa_1bb_1}}$$

$$(\text{அ-து})\quad m_4 = \frac{a_1b\sqrt{-aa_1bb_1}}{-aa_1bb_1} = -\frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{ab_1}$$

m_3, m_4 மதிப்புக்களை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{bb_1} + \frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{-ab_1} = -\frac{2h_1}{b_1}$$

$$\therefore \quad \frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{b_1}\left[\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right] = -\frac{2h_1}{b_1}$$

$$(\text{அ-து})\quad \sqrt{-aa_1bb_1}\,[b-a] = 2h_1ab$$

$$(\text{அ-து})\quad \frac{h_1ab}{b-a} = \frac{1}{2}\sqrt{-aa_1bb_1} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (9)$$

மேலும் $m_1 = m_3 = \dfrac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{bb_1}$

$$m_2 = -\frac{1}{m_3} = -\frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{a_1b}$$

இம் மதிப்புக்களை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{bb_1} - \frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{a_1b} = -\frac{2h}{b}$$

$$(\text{அ-து})\quad \frac{\sqrt{-aa_1bb_1}}{b}\left[\frac{1}{b_1} - \frac{1}{a_1}\right] = -\frac{2h}{b}$$

(அ-து) $\sqrt{-aa_1bb_1}\,[a_1-b_1] = -2ha_1b_1$

$$\therefore \quad \frac{ha_1b_1}{b_1-a_1} = \frac{1}{2}\sqrt{-aa_1bb_1} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (10)$$

(9), (10) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{ha_1b_1}{b_1-a_1} - \frac{h_1ab}{b-a} = \frac{1}{2}\sqrt{-aa_1bb_1}$$

மாதிரி 5: $ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் மூன்று கோடுகளில் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயிருக்க வேண்டிய கட்டுப்பாடு என்ன ?

$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$ மூன்று படிச் சமபடித்தான சமன்பாடு. எனவே, இஃது ஆதி வழிச் செல்லும் மூன்று கோடு களைக் குறிக்கும். இவைகளில் இரண்டு ஒன்றுக்கொன்று செங்குத் தானவை எனில் அவைகளின் சமன்பாடு,

$x^2 + pxy - y^2 = 0$ என்ற வடிவிலிருக்கும்.

எனவே,

$$ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = (x^2+pxy-y^2)\,(ax-dy)$$
$$= ax^3 + x^2y\,(ap-d) - xy^2(a+pd) + dy^3.$$

ஒரே மாதிரியுள்ள உறுப்புக்களின் கெழுக்களைச் சமன்படுத்த,

$$3b = ap - d \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$3c = -(a+pd) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

(1)-லிருந்து $p = \dfrac{3b+d}{a}$

(2)-லிருந்து $p = -\dfrac{a+3c}{d}$

$$\therefore \frac{3b+d}{a} = -\frac{a+3c}{d}$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$a^2 + 3ac + 3bd + d^2 = 0$$

இதுவே தேவையான கட்டுப்பாடாகும்.

மாதிரி 6 : $(A^2-3B^2)\,x^2 + 8ABxy + (B^2-3A^2)y^2 = 0$, $Ax + By + C = 0$ கோடுகளால் அமையும் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக. அதன் பரப்பு $\dfrac{C^2}{\sqrt{3}\,(A^2+B^2)}$ எனக் காண்பி.

ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடு $y - mx = 0$ வடிவிலிருக்கும். இக்கோடுகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால் OPQ என்ற முக்கோணம் கிடைக்கும். ΔOPQ சமபக்கமுக்கோணமெனில் P, Q கோணங்கள் ஒவ்வொன்றின் எண் மதிப்பு $60°$ ஆகும். (அ-து) $\pm 60°$.

$$Ax + By + C = 0 \text{ த்தின் சரிவு } -\frac{A}{B}.$$

$$\therefore\quad \tan(\pm 60) = \frac{m + \dfrac{A}{B}}{1 - m\dfrac{A}{B}}$$

$$(\text{அ-து})\quad \pm\sqrt{3} = \frac{mB + A}{B - mA}$$

$$\therefore\quad 3\,(B - mA)^2 = (mB + A)^2$$

$$m = \frac{y}{x} \text{ ஆதலின்}$$

$$3\left[\,B - \frac{y}{x}\,A\,\right]^2 = \left[\frac{y}{x}\,B + A\right]^2$$

$$\therefore\quad 3\,[Bx - Ay]^2 = [By + Ax]^2$$

இதைச் சுருக்கின்,

$x^2\,[A^2-3B^2] + 8AB\,xy + y^2\,[B^2-3A^2] = 0$. எனவே, $(A^2-3B^2)x^2 + 8AB\,xy + (B^2-3A^2)y^2 = 0$ குறிக்குங் கோடுகள் $Ax + By + C = 0$ கோட்டுடன் அமைக்கும் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணமாகும்.

O-விலிருந்து PQ கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் நீளம் $\dfrac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

$$PQ = 2PK \; [\because K, PQ\text{-வின் நடுப்புள்ளி}]$$

$$= 2OK \tan 30$$

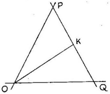
$$= 2 \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

எனவே. $\triangle OPQ$-வின் பரப்பு

$$= \frac{1}{2} \cdot PQ. \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2C}{\sqrt{3}\sqrt{A^2 + B^2}} \cdot \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$= \frac{C^2}{\sqrt{3}\,(A^2 + B^2)}$$



படம் 24

மாதிரி 7. $ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரண்டு, மற்ற இரு கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் சம வெட்டிகளெனின்,

$b + d = 0$, $c + 6a = 0$ என நிறுவுக.

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

குறிக்கும் கோடுகள் நான்கும் ஆதி வழிச் செல்லும் கோணத்தின் சமவெட்டிகள் இரண்டும் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமாதலின் (1) குறிக்கும் இரண்டு இரட்டைக் கோடுகளும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தானவை. எனவே (1)-ஐக் கீழ்க்காணும் வகையில் மாற்றி எழுதலாம்.

$$ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + dxy^3 + ay^4$$
$$= (ax^2 + pxy - ay^2)(x^2 + qxy - y^2)$$
$$= ax^4 + x^3y(aq + p) + x^2y^2(pq - 2a) + xy^3(-p - aq) + ay^4.$$

$\therefore\ b = p + aq$ ... ... (2)

$c = pq - 2a$ ... ... (3)

$-d = p + aq$ ... ... (4)

(2), (3)-லிருந்து $b + d = 0$

(3)-லிருந்து $c = pq - 2a$

மேலும் $ax^2 + pxy - ay^2 = 0$-த்தின் கோண இரு சமவெட்டிகள்

$$\frac{x^2 - y^2}{a + a} = \frac{xy}{\frac{p}{2}}$$

(அ - து) $x^2 - y^2 = \frac{4a}{p}xy.$ ... ... (5)

ஆனால் $ax^2 + pxy - ay^2 = 0$-த்தின் கோணச் சம வெட்டிகள் $x^2 + qxy - y^2 = 0$ ஆகும்.

(அ - து) $x^2 - y^2 = -qxy$ ... ... (6)

(5), (6)-லிருந்து $\frac{4a}{p} = -q \quad \therefore\ pq = -4a$

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$c = pq - 2a = -4a - 2a = -6a$$

$$\therefore\ c + 6a = 0.$$

மாதிரி 8. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = b(y - m_1x)(y - m_2x)$$

$$m_1 + m_2 = -\frac{2h}{b},\quad m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள்

$$y - m_1x = 0, \quad y - m_2x = 0.$$

ஆதி வழியாக இக் கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோடுகள்,

$$m_1y + x = 0. \quad m_2y + x = 0$$

(அ - து) $(m_1y + x)(m_2y + x) = 0$

$$m_1m_2y^2 + (m_1 + m_2)xy + x^2 = 0$$

$$\therefore \quad \frac{a}{b}y^2 - \frac{2h}{b}xy + x^2 = 0.$$

(அ - து) $ay^2 - 2hxy + bx^2 = 0.$

பயிற்சி 3.1.

1. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளில் ஒன்றின் சரிவு மற்றதை விட இரு மடங்கெனில் $8h^2 = 9ab$ என்று நிறுவுக.

2. $x^2 - 4xy + y^2 = 0$, $x + y = 3$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணம் சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

3. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $lx + my - 1 = 0$ கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு,

$$\frac{\sqrt{h^2 - ab}}{am^2 - 2hlm + bl^2}$$ என நிறுவுக.

4. $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் இரண்டு தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளுமெனில் $a^2 + d^2 + bd + ac = 0$ என நிறுவுக.

5. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$, $y = x + c$ என்ற கோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு.

$$\frac{c^2\sqrt{h^2 - ab}}{a + 2h + b}$$ என நிறுவுக.

6. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ ஓர் இணைகரத்தின் இரு பக்கங்களைக் குறிக்கின்றது. $lx + my = 1$ ஒரு மூலை விட்ட

மெனின் மற்றொரு மூலே விட்டம் $y(bl - hm) = x(am - hl)$ என நிறுவுக.

7. $m(x^3 - 3xy^2) + (y^3 - 3x^2y) = 0$ எனும் சமன்பாடு தம்முள் சம சாய்வுள்ள மூன்று கோடுகளேக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

8. $y^3 - x^3 + 3xy(y - x) = 0$ ஒன்றுக் கொன்று சம சாய்வுள்ள மூன்று கோடுகளேக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

9. $x^2 + 2xy\cot\theta + y^2 = 0$ கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு காண்க.

10. $x^2 \sin^2 \alpha . \cos^2 \beta + 4xy \sin \alpha . \sin \beta + y^2 [4 \cos \alpha - (1 + \cos \alpha)^2 \cos^2 \beta] = 0$ என்ற கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் α என நிறுவுக.

11. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு $bx^2 - 2hxy + ay^2 = 0$ என நிறுவுக.

12. $3x^2 - 8xy + 5y^2 = 0$ என்ற கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு யாது ?

13. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளுக்கு $P(x_1\ y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை $\dfrac{ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2}{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}$ என நிறுவுக.

14. $(a + 2hm + bm^2)x^2 + 2[(b - a)m - (m^2 - 1)h]xy + (am_2 - 2hm + b)y^2 = 0$ கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் m-இன் அனேத்து மதிப்புக்களுக்கும் மாருத் தன்மையது என நிறுவுக.

15. $a^2x^2 + 2h(a + b)xy + b^2y^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளுடன் சமமாகச் சாய்ந்துள்ளன என நிறுவுக.

16. $y + x = 0$ கோட்டுடன் α கோணம் பிறப்பிக்கும் கோடுகள் ஆதி வழிச் செல்கின்றன எனில், அக் கோடுகளின் சமன்பாடு $x^2 + 2xy \sec 2\alpha + y^2 = 0$ என நிறுவுக.

17. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகள் $lx + my - 1 = 0$ கோட்டுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சந்தி,

$$\left[\frac{l(a+b)}{am^2 - 2hlm + bl^2},\ \frac{m(a+b)}{am^2 - 2hlm + bl^2}\right]$$

என நிறுவுக.

18. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும் $a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 = 0$ குறிக்கும் கோடுகளில் ஒன்றும் பொருந்தும் கோடுகளெனில் $(ab_1 - a_1b)^2 = 4(ha_1 - h_1a)(bh_1 - b_1h)$ என நிறுவுக.

19. $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்தின் இரு சம வெட்டிகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

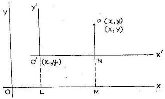
20. ஆதி வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகள் ஒவ்வொன்றி லிருந்து (x_1, y_1) புள்ளிக்கு உள்ள தூரம் d எனில், அக் கோடுகளின் சமன்பாடு $(xy_1 - x_1y)^2 = d^2(x_2 + y^2)$ என நிறுவுக.

விடைகள்

9. $x^2 - y^2 = 0$ 12. $5x^2 + 8xy + 8y^2 = 0$.

3·5. அச்சுநிலை மாற்றம் (Transformation of Axes)

1. அச்சுக்களின் போக்கை மாற்றாமல் ஆயங்களின் ஆதியை மாற்றுதல்



படம் 25.

OX, OY பழைய ஆயங்கள் எனவும், $O'X', O'Y'$ என்பவை முறையே OX, OY கோடுகளுக்கிணையாக வரையப்பட்ட புதிய

ஆயங்கள் எனவும் கொள்வோம். பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து O'ன் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனின் $OL = x_1$, $LO' = y_1$.

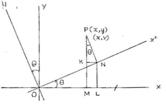
P என்பது தளத்தில் உள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி. பழைய ஆயங்கள், புதிய ஆயங்கள் இவைகளைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் முறையே (x, y), (X, Y) எனக் கொள்வோம். P-யிலிருந்து OX-க்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு OX'-ஐ N-னிலும், OX-ஐ M-மிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad x = OM = OL + LM = x_1 + X$$

$$y = MP = LO' + NP = y_1 + Y.$$

ஆகவே x, y ஆயத்தொலைகளுக்கு $x = x_1 + x$, $y = y_1 + y$ எனப்பிரதியிட்டு ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றலாம்.

2. ஆதியை மாற்றாமல் ஆயங்களின் போக்கை மாற்றுதல்



படம் ௨௬.

OX, OY பழைய ஆயங்கள் எனவும், OX', OY' புதிய ஆயங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

$\angle XOX' = \theta$ எனக்கொள்க. தளத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி P எனக்கொள்வோம். P-யிலிருந்து OX, OX' கோடுகளுக்கு முறையே PM, PN என்ற செங்குத்துக் கோடுகள் வரையவும். N-னிலிருந்து OX, PM கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக முறையே NL, NK கோடுகள் வரையவும். பழைய ஆயங்கள், புதிய

ஆயங்கள் ஆகியவற்றைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x, y), (X, Y) எனக்கொண்டால்,

$$x = OM = OL - ML = OL - KN$$
$$= ON \cos\theta - NP \sin\theta = X \cos\theta - Y \sin\theta$$

$$y = MP = MK + KP = LN + KP$$
$$= ON \sin\theta + NP \cos\theta = X \sin\theta + Y \cos\theta.$$

எனவே, x, y என்ற ஆயத் தொலைகளுக்குப் பதிலாக $x = X \cos\theta - Y \sin\theta$, $y = X \sin\theta + Y \cos\theta$ எனப் பிரதியிட்டு θ கோணத்தில் சாய்ந்துள்ள புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துச் சமன்பாடு பெறலாம்.

3·6. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனவும், அவைகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

ஆயங்களின் போக்கை மாற்றாமல் ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றவும். இம் மாற்றத்தால் (x, y) என்ற ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (X, Y) என மாறினால்,

$$x = x_1 + X, \quad y = y_1 + Y.$$

எனவே சமன்பாடு (1)-இல் $x = x_1 + X$, $y = y_1 + Y$ எனப் பிரதியிடின்,

$$a(x_1+X)^2 + 2h(x_1+X)(y_1+Y) + b(y_1+Y)^2$$
$$+ 2g(x_1+X) + 2f(y_1+Y) + c = 0.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$aX^2 + 2hXY + bY^2 + 2(ax_1 + hy_1 + g)X$$
$$+ 2(hx_1 + by_1 + f)Y + (ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1$$
$$+ 2fy_1 + c) = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

புதிய ஆதிவழி இக் கோடுகள் செல்வதால் இக் கோடுகளைக் குறிக்கும் சமன்பாடு சமபடித்தானதாய் இருக்கவேண்டும்.

எனவே, $ax_1+hy_1+g=0$ ... (2)

$hx_1+by_1+f=0$ ... (3)

$$ax_1^2+2hx_1y_1=by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

(அ-து) $x_1(ax_1+hy_1+g)+y_1(hx_1+by_1+f)$
$+gx_1+fy_1+c=0.$

$\therefore\ gx_1+fy_1+c=0$ ... ... (4)

(2), (3) சமன்பாடுகளிலிருந்து,

$$\frac{x_1}{hf-bg}=\frac{y_1}{gh-af}=\frac{1}{ab-h^2}.$$

$$\therefore\ x_1=\frac{hf-bg}{ab-h^2},\ y_1=\frac{gh-af}{ab-h^2}$$

இதை (4)-இல் பிரதியிடின்,

$$g\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2}\right)+f\left(\frac{gh-af}{ab-h^2}\right)+c=0$$

(அ-து) $fgh-bg^2+fgh-af^2+abc-ch^2=0$

எனவே தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$abc+2fgh=af^2-bg^2-ch^2=0.$$

இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{hf-bg}{ab-h^2},\ \frac{gh-af}{ab-h^2}\right)$

குறிப்பு: $ab-h^2=0$ எனின் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கந்தழியிலுள்ளது. அஃதாவது இரட்டைக்கோடுகள் இணையாகும்.

பிறிதொரு முறை

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ ... ... (1)

இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் எனக்கொள்வோம்.

அவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$l_1x+m_1y+n_1=0,\ l_2x+m_2y+n_2=0$ எனின்

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$
$=(l_1x+m_1y+n_1)\ (l_2x+m_2y+n_2)$

எனவே ஒத்த உறுப்புக்களின் கெழுக்களை ஒப்பிடின்,

$$a=l_1 l_2, \quad b=m_1 m_2, \quad c=n_1 n_2$$

$$2f=m_1 n_2+m_2 n_1, \quad 2g=n_1 l_2+n_2 l_1, \quad 2h=l_1 m_2+l_2 m_1$$

$$\therefore \quad 8fgh=(m_1 n_2+m_2 n_1)(n_1 l_2+n_2 l_1)(l_1 m_2+l_2 m_1)$$
$$=l_1 l_2 (m_1^2 n_2^2+m_2^2 n_1^2)+m_1 m_2 (n_1^2 l_2^2+n_2^2 l_1^2)$$
$$+n_1 n_2 (l_1^2 m_2^2+l_2^2 m_1^2)+2l_1 l_2 m_1 m_2 n_1 n_2 \quad \ldots(2)$$

$$m_1^2 n_2^2+m_2^2 n_1^2=(m_1 n_2+m_2 n_1)^2-2m_1 m_2 n_1 n_2$$
$$=4f^2-2bc$$

$$n_1^2 l_2^2+n_2^2 l_1^2=(n_1 l_2+n_2 l_1)^2-2n_1 n_2 l_1 l_2$$
$$=4g^2-2ca l_1^2 m_2^2+l_2^2 m_1^2=(l_1 m_2+l_2 m_1)^2$$
$$-2l_1 l_2 m_1 m_2=4h^2-2abc.$$

இதை (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$8fgh=a(4f^2-2bc)+b(4g^2-2ca)+c(4h^2-2ab)+2abc$$

இதைச் சுருக்கின்,

$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ என்றாகும்.

3·7. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்குமெனின் இக்கோடுகளுக்கு இணையாக ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகளின் சமன்பாடு $ax^2+2hxy+by^2=0$ ஆகும்.

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$l_1 x+m_1 y+n_1=0, \quad l_2 x+m_2 y+n_2=0$ எனின்

$$a=l_1 l_2, \quad b=m_1 m_2, \quad c=n_1 n_2$$

$$2f=m_1 n_2+m_1 n_2, \quad 2g=n_1 l_2+n_2 l_1, \quad 2h=l_1 m_2+l_2 m_1,$$
$$l_1 x+m_1 y+n_1=0. \quad l_2 x+m_2 y+n_2=0$$

கோடுகளுக்கிணையாக ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகள்,

$$l_1 x+m_1 y=0, \quad l_2 x+m_2 y=0$$

இவைகளின் சேர்த்த சமன்பாடு,

$$(l_1 x+m_1 y)(l_2 x+m_2 y)=0$$
$$l_1 l_2 x^2+(l_1 m_2+l_2 m_1)xy+m_1 m_2 y^2=0$$

(அ-து) $ax^2+2hxy+by^2=0.$

குறிப்பு : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ .. (2) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளுக்கிணையாதலால் சமன்பாடு (1) குறிக்கும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் சமன்பாடு (2) குறிக்கும் கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணத்திற்குச் சமம்.

$$\tan \phi = \frac{\pm 2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}.$$

$h^2 = ab$ எனில் (1) குறிக்கும் கோடுகளிரண்டும் இணைகோடுகளாகும்.

$a + b = 0$ எனில் அவைகள் ஒன்றுக் கொன்று சமமாகும்.

3·8. **$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கு மெனில், அக்கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகள் காணல்.**

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \text{...} \quad (1)$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

ஆயங்களின் போக்கை மாற்றாமல் ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றினால் (x, y) புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (X, Y) ஆக மாறும்.

$$\therefore \quad x = x_1 + X, \quad y = y_1 + Y$$

எனவே புது ஆயங்களைப் பொறுத்து இக் கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$a(x_1 + X)^2 + 2h(x_1 + X)(y_1 + Y) + b(y_1 + Y)^2$$
$$+ 2g(x_1 + X) + 2f(y_1 + Y) + c = 0 \text{ ஆகும்.}$$

இக் கோடுகள் ஆதிவழிச் செல்வதால் சமன்பாடு

$aX^2 + 2hXY + bY^2 = 0$ என்றாகும்.

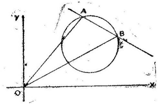
எனவே கோணச் சமவெட்டிகள்,

$$\frac{X_2 - Y_2}{a - b} = \frac{XY}{h}$$

(அ - து) பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் கோண இரு சம வெட்டிகளின் சமன்பாடு,

$$\frac{(x-x_1)^2-(y-y_1)^2}{a-b}=\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{h} \text{ ஆகும்.}$$

3·9. $lx+my+n=0$ கோடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ வளை வரையை வெட்டும் இரு புள்ளிகளை ஆதியுடன் சேர்க்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு காணல்.



படம் 27.

$$lx+my+n=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots(2)$$

சமன்பாடு (1) குறிக்கும் கோடு (2) வளைவரையை A, B புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். O ஆதி எனில் OA, OB கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாட்டைக் காணச் சமன்பாடு (2)-ஐச் சமன்பாடு (1)-இன் உதவியால் சமபடித்தான சமன்பாடாக மாற்ற வேண்டும்.

இவ்வாறு மாற்றினால்,

$$ax^2+2hxy+by^2+(2gx+2fy)\left(\frac{lx+my}{-n}\right)$$

$$+c\left(\frac{lx+my}{-n}\right)^2=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இஃது இருபடிச் சமபடித்தான சமன்பாடாதலின் ஆதி வழிச் செல்லும் இரு கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மேலும்,

$$lx + my + n = 0,\ ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

என்ற சமன்பாடுகளில் பொருந்தும் புள்ளிகள் சமன்பாடு (3) இலும் பொருந்தும்.

எனவே சமன்பாடு (3), OA, OB கோடுகளைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 9: $x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. அவைகள் வெட்டும் புள்ளியையும், அவைகளின் இடையேயுள்ள கோணமும் காண்க.

$$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$a = 1,\ 2h = -5,\ b = 4,\ 2g = 1,\ 2f = 2,\ c = -2.$$

$$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$$

$$= (1)(4)(-2) + 2(1)\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right) - 1(1)^2$$

$$-4\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{5}{2}\right)^2$$

$$= -8 - \frac{5}{2} - 1 - 1 + \frac{25}{2} = -\frac{25}{2} + \frac{25}{2} = 0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$$x^2 - 5xy + 4y^2 = (x - 4y)(x - y)$$

$$\therefore\ x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2$$

$$= (x - 4y + a)(x - y + b)$$

$$= x^2 - 5xy + 4y^2 + (a+b)x - (a+4b)y + ab$$

ஒத்த உறுப்புக்களின் கெழுக்களை ஒப்பிடின்,

$$a + b = 1,\quad a + 4b = -2$$

$$\therefore\ a = 2,\quad b = -1.$$

எனவே கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$x - 4y + 2 = 0,\quad x - y + 1 = 0.$$

இவைகளை விடுவிப்பின் $x = 2,\ y = 1$.

$\therefore$ வெட்டும் புள்ளி $(2, 1)$.

கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனின்,

$$\tan\phi = \frac{2\sqrt{h^2 - ab}}{a + b}$$

$$= \frac{2\sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - 1\cdot 4}}{1 + 4}$$

$$= \frac{2\sqrt{25 - 16}}{10} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right).$$

மாதிரி 10 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின் அவைகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left(\sqrt{\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}},\quad \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}}\right)$$

என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு

$$l_1x + m_1y + n_1 = 0$$

$$l_2x + m_2y + n_2 = 0 \quad \text{எனக் கொள்வோம்.}$$

$$\therefore\ l_1l_2 = a,\quad m_1m_2 = b,\quad n_1n_2 = c$$

$$2f = m_1n_2 + m_2n_1,\quad 2g = n_1l_2 + n_2l_1,\quad 2h = l_1m_2 + l_2m_1.$$

அக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்,

$$\frac{x_1}{m_1n_2 - m_2n_1} = \frac{y_1}{n_1l_2 - n_2l_1} = \frac{1}{l_1m_2 - l_2m_1}$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{m_1n_2 - m_2n_1}{l_1m_2 - l_2m_1},\quad y_1 = \frac{n_1l_2 - n_2l_1}{l_1m_2 - l_2m_1} \quad \ldots \quad (1)$$

மேலும்,

$$m_1n_2-m_2n_1 = \sqrt{(m_1n_2+m_2n_1)^2-2\,m_1m_2n_1n_2}$$

$$= \sqrt{4f^2-4\,bc} \quad = 2\sqrt{f^2-bc}$$

$$n_1l_2-n_2l_1 = \sqrt{(n_1l_2+n_2l_1)^2-2\,n_1n_2l_1l_2} = 2\sqrt{g^2-ca}$$

$$l_1m_2-l_2m_1 = \sqrt{(l_1m_2+l_2m_1)^2-2\,l_1l_2m_1m_2}$$

$$= 2\sqrt{h^2-ab}$$

$$\therefore\ x_1 = \sqrt{\left(\frac{f^2-bc}{h^2-ab}\right)},\ y_1 = \sqrt{\left(\frac{g^2-ca}{h^2-ab}\right)}$$

எனவே அக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left[\sqrt{\frac{f^2-bc}{h^2-ab}},\quad \sqrt{\frac{g^2-ca}{h^2-ab}}\right].$$

மாதிரி 11 : $ax^2+2\,hxy+by^2+2\,gx+2\,fy+c=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பிடுமெனின், ஆதியிலிருந்து இக் கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத்தொகை,

$$\frac{c}{\sqrt{(a-b)^2+4\,h^2}}$$

என நிறுவுக.

$$ax^2+2\,hxy+by^2+2\,gx+2\,fy+c=0$$

குறிக்கும் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு

$$l_1x+m_1y+n_1=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$l_2x+m_2y+n_2=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ l_1l_2=a,\ \ m_1m_2=b,\ \ n_1n_2=c$$

$$2f=(m_1n_2+m_2n_1),\ \ 2g=(n_1l_2+n_2l_1),\ \ 2h=(l_1m_2+l_2m_1)$$

p_1 = ஆதியிலிருந்து (1)-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$= \frac{n_1}{\sqrt{l_1^2+m_1^2}}.$$

$p_2 =$ ஆதியிலிருந்து (2)-க்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$= \frac{n_2}{\sqrt{l_2^2+m_2^2}}$$

$$\therefore \; p_1 p_2 = \frac{n_1 n_2}{\sqrt{(l_1^2+m_1^2)\,(l_2^2+m_2^2)}}$$

$$= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 l_2^2+(l_1^2 m_2^2+l_2^2 m_1^2)+m_1^2 m_2^2}}$$

$$= \frac{n_1 n_2}{\sqrt{\{(l_1 l_2)^2+(l_1 m_2+l_2 m_1)^2-2\, l_1 l_2 m_1 m_2+(m_1 m_2)^2\}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\{a^2+(2h)^2-2\,ab+b^2\}}}$$

$$= \frac{c}{\sqrt{\{(a-b)^2+4\,h^2\}}}$$

மாதிரி 12 : $h^2=ab$, $bg^2=af^2$ எனில் $ax^2+2\,hxy+by^2 + 2gx+2fy+c=0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. அக் கோடுகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்,

$$2\sqrt{\frac{g^2-ac}{a\,(a+b)}}$$

எனவும் நிறுவுக.

$$ax^2+2\,hxy+by^2+2\,gx+2\,fy+c=0 \qquad \dots \quad (1)$$

இணைகோடுகளைக் குறிக்குமெனில், அவைகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$\sqrt{a}x+\sqrt{b}y+l=0, \quad \sqrt{a}x+\sqrt{b}y+m=0$$

வடிவிலிருக்கும்.

$$\therefore \; ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$$
$$=(\sqrt{a}x+\sqrt{b}y+l)\,(\sqrt{a}x+\sqrt{b}y+m)$$
$$=ax^2+2\sqrt{ab}\,xy+by^2+(l+m)\sqrt{a}x$$
$$+(l+m)\sqrt{b}y+lm$$

ஒத்த உறுப்புக்களின் கெழுக்களை ஒப்பிடின்,

$\sqrt{a}\,(l+m) = 2g$ ... ... (2)

$\sqrt{b}\,(l+m) = 2f$ ... ... (3)

$2\sqrt{ab} = 2h$ ... ... (4)

$lm = c$ ... ... (5)

ஆகும்.

(3), (2) சமன்பாடுகளிலிருந்து $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \dfrac{g}{f}$

(அ - து) $f\sqrt{a} = g\sqrt{b}$ $\quad\therefore\; af^2 = bg^2$.

(4)-லிருந்து $4ab = 4h^2$ (அ - து) $h^2 = ab$.

மேலும் ஆதியிலிருந்து,

$$\sqrt{a}\,x + \sqrt{b}\,y + l = 0, \quad \sqrt{a}\,x + \sqrt{b}\,y + m = 0$$

கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளம் முறையே p_1, p_2 எனின்,

$$p_1 = \frac{l}{\sqrt{a+b}}, \quad p_2 = \frac{m}{\sqrt{a+b}}$$

$$\therefore\; d = p_1 \sim p_2 = \frac{l-m}{\sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{\sqrt{(l+m)^2 - 4lm}}{\sqrt{a+b}}$$

$$= \frac{\sqrt{\dfrac{4g^2}{a} - 4c}}{\sqrt{a+b}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{g^2 - ac}{a\,(a+b)}}$$

மாதிரி 13 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் கோண இரு சமவெட்டிகளாலும், x ஆயத்தாலும் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு,

$$\frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h} \cdot \frac{ca - g^2}{ab - h^2}$$

என நிறுவுக.

இரட்டைக் கோடுகள்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad ... \quad (1)$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்,

$$\therefore \quad x_1 = \sqrt{\frac{f^2 - bc}{h^2 - ab}}, \quad y_1 = \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}}.$$

இரட்டைக் கோடுகளின் கோண இரு சமவெட்டிகள்,

$$\frac{(x - x_1)^2 - (y - y_1)^2}{a - b} = \frac{(x - x_1)(y - y_1)}{h} \quad ... \quad (2)$$

இக் கோடுகள் x ஆயத்தை $A(\alpha_1, 0)$, $B(\alpha_2, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கொள்க.

சமன்பாடு (2)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடின் கிடைக்கும் இருபடிச் சமன்பாட்டிலிருந்து x-இன் இரு மதிப்புக்களான α_1, α_2 காணலாம்.

$$\therefore \quad \frac{(x - x_1)^2 + y_1^2}{a - b} = \frac{-(x - x_1)y_1}{h}$$

(அ - து) $hz^2 + y_1(a - b)z - hy_1^2 = 0$, $z = (x - x_1)$

$$\therefore \quad z_1 + z_2 = \frac{-(a - b)y_1}{h}, \quad z_1 z_2 = -y_1^2$$

மேலும் $z_1 = \alpha_1 - x_1$, $z_2 = \alpha_2 - x_1$

(அ-து) $\alpha_1 - \alpha_2 = (z_1 + x_1) - (z_2 + x_1) = z_1 - z_2 \ldots (3)$

$\triangle PAB = \frac{1}{2} AB$ [P-இலிருந்து AB-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்]

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 \sim \alpha_2)\, y_1$$

$$= \frac{1}{2}(z_1 - z_2)\, y_1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{(z_1 + z_2)^2 - 4z_1 z_2}\right\} y_1$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{(a-b)^2}{h^2} y_1^2 = 4y_1^2}\right\} y_1$$

$$= \frac{1}{2} y_1 \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{h} y_1$$

$$= \frac{y_1^2}{2h} \sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}$$

$$= \frac{g^2 - ca}{h^2 - ab} \cdot \frac{\sqrt{(a-b)^2 + 4h^2}}{2h}.$$

$$\left[\because \; y_1 = \sqrt{\frac{g^2 - ca}{h^2 - ab}} \right]$$

மாதிரி 14 : $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆதியிலிருந்து சம தூரத்திலிருப்பின் $f^4 - g^4 = c\,(bf^2 - ag^2)$ என நிறுவுக.

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$$l_1 x + m_1 y + n_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$l_2 x + m_2 y + n_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \; a = l_1 l_2, \quad b = m_1 m_2, \quad c = n_1 n_2$$

$$2f = m_1 n_2 + m_2 n_1, \; 2g = n_1 l_2 + n_2 l_1,$$

$$2h = l_1 m_2 + l_2 m_1$$

(1), (2) கோடுகள் ஆதியிலிருந்து சம தூரத்திலிருப்பின்,

$$\frac{n_1}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2}} = \frac{n_2}{\sqrt{l_2^2 + m_2^2}}$$

$$\therefore \; n_1^2 (l_2^2 + m_2^2) = n_2^2 (l_1^2 + m_1^2)$$

(அ-து) $n_1^2 l_2^2 + n_1^2 m_2^2 - n_2^2 l_1^2 - n_2^2 m_1^2 = 0$

(அ-து) $(n_1^2 l_2^2 - n_2^2 l_1^2) + (n_1^2 m_2^2 - n_2^2 m_1^2) = 0$

(அ-து) $(n_1 l_2 + n_2 l_1)(n_1 l_2 - n_2 l_1)$
$+ (n_1 m_2 + n_2 m_1)\;(n_1 m_2 - n_2 m_1) = 0$

(அ-து) $(n_1 l_2 + n_2 l_1)(n_1 l_2 - n_2 l_1)$
$$= (m_1 n_2 + m_2 n_1)(m_1 n_2 - m_2 n_1)$$

$$\therefore \quad (n_1 l_2 + n_2 l_1)\sqrt{(n_1 l_2 + n_2 l_1)^2 - 4 n_1 n_2 l_1 l_2}$$
$$= (m_1 n_2 + m_2 n_1)\sqrt{(m_1 n_2 + m_2 n_1)^2 - 4 m_1 m_2 n_1 n_2}$$

(அ-து) $2g\sqrt{4g^2 - 4ca} = 2f\sqrt{4f^2 - bc}$

இருபுறமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$4g^2(4g^2 - 4ca) = 4f^2(4f^2 - 4bc)$$

$$\therefore \quad g^2(g^2 - ca) = f^2(f^2 - bc)$$

(அ-து) $g^4 - f^4 = -c(bf^2 - ag^2)$

$$\therefore \quad f^4 - g^4 = c(bf^2 - ag^2).$$

மாதிரி 15: $12x^2 + 7xy - 12y^2 = 0$, $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1 = 0$ குறிக்கும் கோடுகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 = (3x + 4y)(4x - 3y).$$

$$12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1$$
$$= (3x + 4y + l)(4x - 3y + m)$$

ஒத்த உறுப்புக்களின் கெழுக்களை ஒப்பிடின் $l = -1$, $m = 1$ என்றாகும்.

எனவே, $12x^2 + 7xy - 12y^2 - x + 7y - 1$
$$= (3x + 4y - 1)(4x - 3y + 1).$$

எனவே நான்கு கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$3x + 4y = 0, \; 4x - 3y = 0$ ... (1)

$3x + 4y - 1 = 0, \; 4x - 3y + 1 = 0$ ... (2)

(1) குறிக்கும் கோடுகள், (2) குறிக்கும் கோடுகளுக்கு இணையாகும். எனவே இக்கோடுகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும்.

மேலும், (1) குறிக்கும் கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை ; (2) குறிக்கும் கோடுகளும் தம்முள் செங்குத்தானவை.

மேலும் $3x + 4y = 0$, $3x + 4y - 1 = 0$ இடையேயுள்ள தூரம் $\frac{0}{\sqrt{3^2+4^2}} \sim \frac{-1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{1}{5}$.

இவ்வாறே $4x - 3y = 0$, $4x - 3y + 1 = 0$ இடையே யுள்ள தூரம் $\frac{0}{\sqrt{4^2+3^2}} \sim \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2}} = \frac{1}{5}$.

$\therefore$ நான்கு கோடுகளும் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும்.

பயிற்சி 3.2.

1. $x^2 + 5xy + 4y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிப்பின் λ-வின் மதிப்பு யாது? அக்கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் காண்க.

2. $x^2 - y^2 + x - 3y - 2 = 0$ இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவு. அவைகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தையும், அவைகள் வெட்டும் புள்ளியையும் காண்க.

3. $4x^2 + 4xy + y^2 - 6x - 3y - 4 = 0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறிக்கும் என நிறுவி, அவைகளுக்கிடையே யுள்ள தூரத்தைக் காண்க.

4. $y^2 - 4y + 3 = 0$, $x^2 + 4xy + 4y^2 - 5x - 10y + 4 = 0$ என்ற கோடுகள் ஓர் இணைகரத்தை அமைக்கும் என நிறுவிப் பக்கங்களின் நீளத்தைக் காண்க.

5. $6x^2 - 5xy - 6y^2 = 0$, $6x^2 - 5xy - 6y^2 + x + 5y - 1 = 0$ கோடுகள் ஒரு சதுரத்தை அமைக்கும் என நிறுவுக.

6. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற கோடுகள் y ஆயத்தை A, B புள்ளிகளில் சந்திக்கும். O ஆதி எனில், $OA^2 + OB^2 = \frac{c\,(a+b) - f^2 - g^2}{ab - h^2}$ என நிறுவுக.

7. $2x^2 + 5xy + 2y^2 + 15x + 18y + 28 = 0$ கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகளைக் காண்க.

8. P என்ற ஒரு புள்ளியிலிருந்து $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டைக்கோடுகளுக்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் $2c$ எனில், P-யின் இயங்குவழி $c^2\ \{4h^2+(a-b)^2\} = (x^2 + y^2)\ (h^2 - ab)$ என நிறுவுக.

9. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் x அச்சுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\dfrac{g^2 - ac}{a\sqrt{h^2 - ab}}$ என நிறுவுக.

10. $5x^2+12xy-6y^2+4x-2y+3=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை $x-y-1=0$ கோடு வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் சேர்க்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஆயங்களுடன் சமச் சாய்வுடையன என நிறுவுக.

11. $lx+my=1$ என்ற கோடு $x^2+y^2-a^2=0$ வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. O ஆதி எனில், $\angle OPQ = 2\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{a\sqrt{l^2+m^2}}\right)$ என நிறுவுக.

12. $6x-y+6=0$ என்ற கோடு $3x^2+4xy-4y^2-11x+2y+6=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் சேர்க்கும் இரட்டைக்கோடுகள் ஆயங்களுடன் சமச் சாய்வுடையது என நிறுவுக.

13. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின், இவைகள் ஆயங்களை வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு,

$$c\,(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c) + 4\,fgxy=0$$

என நிறுவுக.

14. $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தை $y=mx+c$ என்ற கோடு வெட்டும் புள்ளிகளை ஆதியுடன் சேர்க்கும் இரட்டைக் கோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்து எனின் $2c^2 = a^2\ (l^2+m^2)$ என நிறுவுக.

15. $(ab-h^2)(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy)+af^2+bg^2-2fgh=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் அமைக்கும் ஒரு நாற்கரம் சாய் சதுரமெனின்,

$$(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0$$ என நிறுவுக.

16. $6x^2+xy-12y^2-14x+47y-40=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் $14x^2+xy-4y^2-80x+15y=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளுடன் சமச் சாய்வுடையது என நிறுவு.

17. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரண்டு இணை கோடுகளைக் குறிக்கு மெனின், அவைகளுக்கிணையாக ஆதி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $ax+hy=0$ அல்லது $hx+by=0$ என நிறுவுக.

18. $ax^2+2hxy+by^2=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணத்தின் இரு சமவெட்டிகளில் ஒன்று $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் சென்றால் $(a-b)fg+h(f^2-g^2)=0$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\lambda=-\frac{10}{9}$; $\tan^{-1}\left(\frac{8}{5}\right)$. 2. $90°$; $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$.
4. 3; $2\sqrt{5}$. 7. $3x^2-3y^2+20x-2y+33=0$.

4. வட்டம்

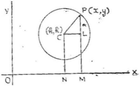
(Circle)

4·1. வட்டம் - வரையறை

நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து நிலையான தூரத்தில் இயங்கும் புள்ளியின் பாதை வட்டமெனப்படும். நிலைத்த புள்ளி வட்டத்தின் மையம் எனவும், நிலையான தூரம் அதன் ஆரம் எனவும் கூறப்படுகின்றன.

4·2. வட்டத்தின் சமன்பாடு

OX, OY என்பவை ஆயங்கள், C வட்டமையம், a வட்டத்தின் ஆரம் எனக் கொள்வோம்.



படம் 28

$P(x, y)$ பரிதியின் (circumferance) மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி, x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக PM, CN என்ற கோடுகள் வரையவும். PM-க்குச் செங்குத்தாக CL என்ற கோடு வரையவும்.

C-யின் ஆயத்தொலைகள் (h, k) எனில்,

$$CL = NM = OM - ON = x - h$$

$$LP = MP - ML = MP - NC = y - k.$$

செங்கோண முக்கோணம் CLP-யில்

$$CL^2 + LP^2 = CP^2$$

$$\therefore \quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$$

எனவே, மையம் (h, k), ஆரம் a கொண்ட ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$.

கிளை 1 : ஆதியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு.

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = a^2$$

(அ-து) $x^2 + y^2 = a^2$.

கிளை 2: NC ஆரத்திற்குச் சமமெனில், வட்டம் x ஆயத்தைத் தொடும். எனவே $k = a$.

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = k^2$$

(அ-து) $x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 = 0$.

இவ்வாறே வட்டம் y ஆயத்தைத் தொடுமெனில் அதன் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + k^2 = 0.$$

4·3. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **என்ற சமன்பாடு** g, f, c **இவைகளின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் ஒரு வட்டத்தினைக் குறிக்கும்.**

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

$$(x^2 + 2gx + g^2) + (y^2 + 2fy + f^2) = g^2 + f^2 - c.$$

$$(x+g)^2 + (y+f)^2 = (\sqrt{g^2 + f^2 - c})^2.$$

இச் சமன்பாட்டை,

$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2$ என்ற சமன்பாட்டுடன் ஒப்பிட்டு நோக்கின்,

$h = -g, \quad k = -f, \quad a = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$ என்றாகும்.

எனவே, $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற சமன்பாடு $(-g, -f)$ புள்ளியை மையமாகவும், $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ அளவு ஆரமும் கொண்ட ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு : $g^2 + f^2 - c > 0$ எனில், ஆரம் மெய்யானது. $g^2 + f^2 - c = 0$ எனில், ஆரம் பூச்சியமாகும். அப்பொழுது வட்டம் மையப் புள்ளியுடன் ஒன்றுபடும். அத்தகைய வட்டம் புள்ளி வட்டம் (point circle) எனப்படும். $g^2 + f^2 - c < 0$ எனில் ஆரம் கற்பனையாகும். அப்பொழுது வட்டம் மெய்யான மையமும், கற்பனையான ஆரமும் கொண்டிருக்கும்.

4·4. இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

இருபடிச் பொதுச் சமன்பாடு,

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad (1)$$

ஆகும்.

இதில் $a = b$, $h = 0$ எனில் சமன்பாடு (1)

$$ax^2 + ay^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 + y^2 + \frac{2g}{a}x + \frac{2f}{a}y + \frac{c}{a} = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0 \quad \dots \quad (2)$$

ஆனால் சமன்பாடு (2) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும் என்று பத்தி 4·3-இல் கண்டோம்.

எனவே, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு (general equation of second degree) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடுகள்.

(i) x^2-இன் கெழு $= y^2$-இன் கெழு

(ii) xy-இன் கெழு $= 0$.

ஒரு வட்டச் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம் (standard equation of a circle).

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$$

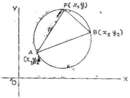
4·5. கொடுத்துள்ள மூன்று புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல்

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம். இதில் g, f, c என்ற மூன்று மாறிலிகள் (constants) உள்ளன. கொடுத்துள்ள புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளை ஒவ்வொன்ருக (1)-இல் பிரதியிடின் g, f, c என்ற மாறிலிகளை இணைத்து மூன்று சமன்பாடுகள் கிடைக்கப் பெறும். g, f, c மதிப்புக்களைக் காண இச் சமன்பாடுகளை விடுவிக்க வேண்டும். பின் அவைகளின் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின் வட்டத்தின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

4·6. $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ என்ற புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காணல்



படம் 29.

$A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, AB விட்டம், $P(x, y)$ பரிதியின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

PA, PB-ஐச் சேர்க்கவும்,

$$PA\text{-இன் சரிவு } \frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$PB\text{-இன் சரிவு } \frac{y-y_2}{x-x_2}$$

$\angle APB = 90°$ ஆதலால், PA, PB கோடுகளின் சரிவுகள் தம் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

$$\therefore \frac{y-y_1}{x-x_1} \cdot \frac{y-y_2}{x-x_2} = -1$$

$$(y-y_1)(y-y_2) = -(x-x_1)(x-x_2).$$

(அ-து) $(x-x_1)(x-x_2) + (y-y_1)(y-y_2) = 0.$

மாதிரி 1: $(-2, 3)$ புள்ளியை மையமாகவும், ஆரம் 5 அலகும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

மையம் (h, k); ஆரம் a எனில், சமன்பாடு

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2.$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 = 5^2.$$

(அ-து) $x^2+y^2+4x-6y-12=0$.

மாதிரி 2: $x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y - 15 = 0$$
$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 2y) = 15$$
$$(x^2 - 6x + 9) + (y^2 + 2y + 1) = 15 + 9 + 1$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2.$$

எனவே, வட்டத்தின் மையம் $(3, -1)$; ஆரம் 5.

மாதிரி 3: $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(-3, -4)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனக் கொள்க. கொடுத்துள்ள $(3, 4)$, $(0, 5)$, $(-3, -4)$ புள்ளிகள் வழி இவ் வட்டம் செல்வதால்,

$$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$$

(அ-து) $6g + 8f + c = -25 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$$0 + 25 + 0 + 10f + c = 0$$

(அ-து) $10f + c = -25 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$$9 + 16 - 6g - 8f + c = 0$$

(அ-து) $-6g - 8f + c = -25 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின், $6g - 2f = 0 \quad \ldots \quad (4)$

(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின், $6g + 18f = 0 \quad \ldots \quad (5)$

சமன்பாடுகள் (4), (5)-இலிருந்து $g = 0$, $f = 0$

இம் மதிப்புக்களை (1)-இல் பிரதியிடின், $c = -25$.

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2(0)x + 2(0)y - 25 = 0$$

(அ-து) $x^2 + y^2 = 25$.

மாதிரி 4: $lx + my = 1$ கோடு $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ என்ற இரட்டைக் கோடுகளை வெட்டும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $(x^2 + y^2)(am^2 - 2hlm + bl^2) + 2x(hm - bl) + 2y(hl - am) + (a + b) = 0$ என நிறுவுக.

$ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு,

$y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore\ m_1 + m_2 = \frac{-2h}{b},\quad m_1m_2 = \frac{a}{b}.$$

$y - m_1x = 0$, $y - m_2x = 0$ கோடுகள் $lx + my = 1$ என்ற கோட்டை வெட்டும் புள்ளிகள் A, B எனில் அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே,

$$\left(\frac{1}{l + mm_1},\ \frac{m_1}{l + mm_1}\right),\ \left(\frac{1}{l + mm_2},\ \frac{m_2}{l + mm_2}\right)$$

எனவே, AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$\left(x - \frac{1}{l + mm_1}\right)\left(x - \frac{1}{l + mm_2}\right)$$

$$+ \left(y - \frac{m_1}{l + mm_1}\right)\left(y - \frac{m_2}{l + mm_2}\right) = 0.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$x^2 + y^2 - x\left(\frac{1}{l + mm_1} + \frac{1}{l + mm_2}\right)$$

$$- y\left(\frac{m_1}{l + mm_1} + \frac{m_2}{l + mm_2}\right) + \frac{1}{(l + mm_1)(l + mm_2)}$$

$$+ \frac{m_1m_2l}{(l + mm_1)(l + mm_2)} = 0$$ ஆகும்.

(அ - து) $x^2 + y^2 - \left[\dfrac{2l + m(m_1 + m_2)}{(l + mm_1)(l + mm_2)}\right]x$

$$-\left[\frac{l(m_1 + m_2) + 2mm_1m_2}{(l + mm_1)(l + mm_2)}\right]y + \frac{1 + m_1m_2}{(l+mm_1)(l+mm_2)} = 0.$$

(அ-து) $(l+mm_1)(l+mm_2)(x^2+y^2)-[2l+m(m_1+m_2)]x$
$-[l(m_1+m_2)+2mm_1m_2]y+(1+m_1m_2)=0.$ ... (2)

$$(l + mm_1)(l + mm_2) = l^2 + lm(m_1 + m_2) + m^2m_1m_2$$

$$= l^2 + lm\left(\frac{-2h}{b}\right) + m^2\frac{a}{b}$$

$$= \frac{bl^2 - 2hlm + am^2}{b}$$

எனவே, சமன்பாடு (2)

$$\frac{bl^2 - 2hlm + am^2}{b}(x^2 + y^2) - \left[2l + m\left(\frac{-2h}{b}\right)\right]x$$

$$-\left[l\left(\frac{-2h}{b}\right) + 2m\frac{a}{b}\right]y + \left[1 + \frac{a}{b}\right] = 0.$$

(அ - து) $(x^2 + y^2)(am^2 - 2hlm + bl^2) + 2(hm - bl)x$
$+ 2(hl - am)y + (a + b) = 0.$

பயிற்சி 4.1.

1. பின்வரும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.
   (i) மையம் $(3, -2)$; ஆரம் 3
   (ii) மையம் $(3, 4)$; ஆரம் 5
   (iii) மையம் (a, b); ஆரம் $(a+b)$.

2. பின்வரும் வட்டங்களின் மையமும், ஆரமும் காண்க.
   (i) $x^2 + y^2 + 3x + 7y + 2 = 0$
   (ii) $2x^2 + 2y^2 - 3x + 4y - 7 = 0$
   (iii) $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0.$

3. பின்வரும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

(i) $(0, 1), (2, 3), (-2, 5)$

(ii) $(10, 6), (-4, 4), (4, 8)$

(iii) $(2, 1), (1, 2), (8, 9)$.

4. ஆதிவழிச் செல்லும் வட்டம் ஆயங்களில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத்துண்டுகள் h, k எனில் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. இரண்டு ஆயங்களையும், $x = c$ கோட்டையும் தொடும் வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது ?

6. $5x+y-103=0$, $x-y-11=0$, $2x-3y-31=0$ என்ற கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. x ஆயத்தை $(a, 0)$ புள்ளியில் தொடும் ஒரு வட்டம் y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் $l \, (l > 0)$ எனின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. $a = 12$, $l = 10$ எனின் அவ்வட்டம் யாது ?

8. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தின் ஆதியில் நேர்க்கோணத்தை ஏற்கும் வட்ட நாண்களுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் தம் நாண்களின் அடிப்புள்ளிகளின் இயக்கு வழி $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$ என நிறுவுக.

9. $x + y = 6$, $2x + y = 4$, $x + 2y = 5$ என்ற கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் சுற்று வட்ட மையமும் (circumcentre), ஆரமும் காண்க.

10. $2x - y = 0$, $x - 2y = 0$, $x + y = 1$, $x + y = 2$ என்ற கோடுகளால் அமையும் நாற்கரம் ஒரு வட்ட நாற்கரம் என நிறுவுக.

11. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ வட்டத்தின் மீதுள்ள $(4, 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனை காண்க.

12. $(3, -1)$ புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் $4x - 3y = 9$ என்ற கோட்டைத் தொடுமெனின் அவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

13. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தில் $(x_1 y_1)$-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு காண்க.

14. x ஆயத்தைத் தொடும் வட்டம் $(1, -2)$, $(3, -4)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனின் அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

15. $x^2 + y^2 - 8x - 6y - 11 = 0$ வட்டத்திற்கு x ஆயத்திற் கிணையாக உள்ள விட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க. அக்கோடு வட்டத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளிகள் யாவை ?

விடைகள்

1. (i) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 4 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2ab = 0.$

2. (i) $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$; $\frac{5}{2}\sqrt{2}$

   (ii) $\left(\frac{3}{4}, -1\right)$; $\frac{9}{4}$

   (iii) $\left(-\frac{3}{2}, -2\right)$; $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

3. (i) $3x^2 + 3y^2 + 2x - 20y + 17 = 0$

   (ii) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 8 = 0$

   (iii) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$

4. $x^2 + y^2 - hx - ky = 0.$

5. $4x^2 + 4y^2 - 4cx - 4cy + c^2 = 0.$

6. $x^2 + y^2 - 14x - 6y - 111 = 0.$

7. $(x - a)^2 + \left(y - \frac{\sqrt{l^2 + 4a^2}}{2}\right)^2 = \frac{l^2 + 4a^2}{4}$;

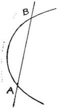
   $x^2 + y^2 - 24x - 26y + 144 = 0.$

9. $\left(\frac{17}{2}, \frac{19}{2}\right)$; $\frac{15}{2}\sqrt{2}$.

11. $(-2, -7)$.

12. $25x^2 + 25y^2 - 150x + 50y + 214 = 0$.

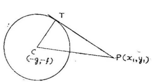
4·7. தொடுகோடு—வரையறை :



படம் 30.

ஏதேனும் ஒரு வளைவரையின் (curve) மீது A, B மிக அருகாமையிலுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக்கொள்வோம். AB-ஐச் சேர்க்கவும். A-ஐ நோக்கி B நகர்ந்து முடிவில் அத்துடன் பொருந்தும்போது AB கோட்டின் நிலையை A-யில் அவ்வளைவரையின் தொடுகோடு என்கிறோம்.

4·8. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம்.



படம் 31.

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடு PT என்போம்.

வட்ட மையம் $c(-g, -f)$

வட்டத்தின் ஆரம் $CT = \sqrt{(g^2+f^2-c)}$

CT, CP-ஐச் சேர்க்கவும்.

CTP என்ற செங்கோண முக்கோணத்தில்,

$$CP^2 = CT^2 + PT^2$$

(அ-து) $PT^2 = CP^2 - CT^2$

$$CP^2 = (x_1+g)^2 + (y_1+f)^2$$

$$CT^2 = g^2 + f^2 - c.$$

$$\therefore \quad PT^2 = \{(x_1+g)^2 + (y_1+f)^2\} - \{g^2+f^2-c\}$$

$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

எனவே, தொடுகோட்டின் நீளம்,

$$PT = \sqrt{[x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c]}.$$

கிளை : (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோட்டின் நீளம்,

$$\sqrt{(x_1^2 + y_1^2 - a^2)}.$$

குறிப்பு : $PT = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c}.$

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c > 0$ எனில், $P(x_1 y_1)$ புள்ளி வட்டத்திற்குவெளியே இருக்கும்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0$ எனில், $P(x_1 y_1)$ புள்ளி வட்டத்தின் மேலிருக்கும்.

$x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c < 0$ எனில் $P(x_1 y_1)$ புள்ளி வட்டதிதின் உள்ளே இருக்கும். இந் நிலையில் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு வரையமுடியாது. எனவே PT என்ற கோட்டை ஒரு கற்பனைத் தொடுகோடு எனக் கொள்ளவேண்டும்.

மாதிரி 5 : ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2+4x+3=0$, $x^2+y^2-6x+5=0$ வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் அளவுகள் 1 : 2 விகிதத்திலிருப்பின் அப் புள்ளியின்

இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அவ் வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

$$x^2+y^2+4x+3=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$x^2+y^2-6x+5=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து (1), (2) வட்டங்களுக்கு வரையப் படும் தொடுகோடுகளின் நீளம் முறையே PT_1, PT_2 எனின்,

$$PT_1 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 3)}$$

$$PT_2 = \sqrt{(x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 + 5)}$$

$$\frac{PT_1}{PT_2} = \frac{1}{2} \text{ ஆதலால் } \frac{PT_1^2}{PT_2^2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{x_1^2 + y_1^2 + 4x_1 + 3}{x_1^2 + y_1^2 - 6x_1 + 5} = \frac{1}{4}$$

(அ - து) $4x_1^2+4y_1^2+16x_1+12=x_1^2+y_1^2-6x_1+5$

(அ - து) $3x_1^2+3y_1^2+22x_1+7 = 0.$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$3x^2 + 3y_2 + 22x + 7 = 0. \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

சமன்பாடு (3)-இல் x^2-இன் கெழு $= y^2$-இன் கெழு,
xy-இன் கெழு $= 0$

$\therefore$ சமன்பாடு (3) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (3)-ஐப் பின் வருவாறு எழுதலாம்.

$$x^2 + y^2 + \frac{22}{3}x + \frac{7}{3} = 0.$$

மையம் $(-g, -f)$ (அ - து) $\left(-\frac{11}{3}, 0\right)$

ஆரம் $= \sqrt{(g^2 + f^2 - c)}$,

$$\text{(அ - து) } \sqrt{\left(\frac{121}{9} - \frac{7}{3}\right)} = \frac{10}{3}.$$

4·9. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ **வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.**

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவை வட்டத்தின் மீது மிக அருகாமையிலுள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

PQ-வின் சமன்பாடு,

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

P, Q என்ற புள்ளிகள் வட்டத்தின்மீதுள்ளவை யாதலின்,

$$x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$x_2^2+y_2^2+2gx_2+2fy_2+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-லிருந்து (3)-ஐக் கழித்தால்,

$$x_1^2-x_2^2+y_1^2-y_2^2+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0$$

(அ-து) $(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)$
$+2g(x_1-x_2)+2f(y_1-y_2)=0$

(அ-து) $(x_1-x_2)[x_1+x_2+2g]+(y_1-y_2)[y_1+y_2+2f]=0$.

$$\therefore \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}.$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$y-y_1=-\frac{x_1+x_2+2g}{y_1+y_2+2f}(x-x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

Q புள்ளி P புள்ளியை நெருங்கி முடிவில் அத்துடன் பொருந்துவதால் $x_2=x_1$, $y_2=y_1$ ஆகும். இதை (4)-இல் பயன்படுத்தினால்,

$$y-y_1=-\frac{x_1+g}{y_1+f}(x-x_1) \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து) $(y-y_1)(y_1+f)+(x-x_1)(x_1+g)=0$

(அ-து) $xx_1+yy_1+gx+fy=x_1^2+y_1^2+gx_1+fy_1$ இருபக்கமும் gx_1+fy_1+c-ஐக் கூட்ட,

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$$
$$=x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0$$

[சமன்பாடு (2)-இன் படி].

எனவே, $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$$

கிளை : $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $xx_1+yy_1-a^2=0$.

4·10. $y=mx+c$ கோடும், $x^2+y^2=a^2$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்

$$y=mx+c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x^2+y^2=a^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவைகள் வெட்டும் புள்ளிகள் இரு வளைவரையின்மீதும் இருப்பதால் இப் புள்ளிகளைச் சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐத் தீர்வு காண்பதன் மூலம் பெறலாம்.

(1)-இல் y-யின் மதிப்பை (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$x^2 + (mx + c)^2 = a^2$$

(அ - து) $x^2(1 + m^2) + 2mcx + (c^2-a^2) = 0.$ ... (3)

இது x-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலால் x-க்கு இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. எனவே, (1) குறிக்கும் கோடு (2) குறிக்கும் வட்டத்தை இரு புள்ளிகளில் வெட்டும். இப் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் சமன்பாடு (3)-இன் மூலங்களாகும்.

(3)-இன் தன்மைக் காட்டி (Discriminant)

$(2mc)^2 - 4(1 + m^2)(c^2 - a^2)$ ஆகும்.

(அ - து) $a^2(1 + m^2) - c^2$.

இதன் மதிப்பைப் பொறுத்து வெட்டும் புள்ளிகள் மெய்யானவையாகவோ, பொருந்துவனவாகவோ, கற்பனையாகவோ அமையும்.

(அ - து) $a^2(1 + m^2) - c^2 > 0$ எனில், புள்ளிகள் மெய்யானவை.

$a^2(1 + m^2) - c^2 = 0$ எனில், பொருந்தும் புள்ளிகளாகும்.

$a^2(1 + m^2) - c^2 < 0$ எனில், கற்பனைப் புள்ளிகளாகும்.

4·11. $y=mx+c$ கோடும், $x^2+y^2=a^2$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நீளம்

$$y = mx + c \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற கோடு,

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ எனக் கொள்வோம்.

A, B புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

$$x^2(1 + m^2) - 2mcx + (c^2 - a^2) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

[பத்தி 4·10, சமன்பாடு 3]

$$\therefore \quad x_1 + x_2 = -\frac{2mc}{1+m^2}, \quad x_1x_2 = \frac{c^2-a^2}{1+m^2}$$

மேலும், A, B புள்ளிகள் $y=mx+c$ கோட்டின்மீதும் அமைந்திருப்பதால்,

$$y_1 = mx_1 + c, \quad y_2 = mx_2 + c$$

$$\therefore \quad y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2).$$

$$\begin{aligned}
AB^2 &= (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 \\
&= (x_1-x_2)^2 + m^2(x_1-x_2)^2 \\
&= (1+m^2)(x_1-x_2)^2 \\
&= (1+m^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2] \\
&= (1+m^2)\left[\frac{4m^2c^2}{(1+m^2)^2} - \frac{4(c^2-a^2)}{(1+m^2)}\right] \\
&= \frac{4m^2c^2}{1+m^2} - 4(c^2-a^2) \\
&= \frac{4m^2c^2 - 4(c^2-a^2)(1+m^2)}{1+m^2} \\
&= \frac{4m^2c^2 - 4(c^2+m^2c^2-a^2-a^2m^2)}{1+m^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{4(a^2+a^2m^2-c^2)}{1+m^2}$$

$$= \frac{4[a^2(1+m^2)-c^2]}{1+m^2}$$

எனவே நீளம்,

$$AB = 2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}.$$

4·12. $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்திற்கு $y=mx+c$ என்ற கோடு தொடுகோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு.

$$y = mx + c \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும்.

$$x^2(1+m^2) + 2mcx + (c^2-a^2) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

[பத்தி 4.10. சமன்பாடு 3] வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் பொருந்தும் புள்ளிகளெனில், கோடு (1), வட்டம் (2)-க்குத் தொடு கோடாகும்.

(அ-து) கோடு (1), வட்டம் (2)-க்குத் தொடுகோடெனில், சமன்பாடு (3)-இன் மூலங்கள் சமமாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக் காட்டி பூச்சியமாகும்

$$\therefore \quad 4m^2c^2 - 4(1+m^2)(c^2-a^2) = 0$$

(அ-து) $a^2(1+m^2) - c^2 = 0$

$$\therefore \quad c^2 = a_2(1+m^2).$$

(அ-து) $c = \pm a\sqrt{1+m^2}.$

எனவே, $y=mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ என்ற இரு கோடுகளும் m-இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் தொடு கோடுகளாகும்.

பிறிதொரு முறை

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடு கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

(அ - து) $y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y^2}$

இதை $y = mxc$-யுடன் ஒப்பிடின்,

$$m = -\frac{x_1}{y_1} \quad \text{(i)}, \quad c = \frac{a^2}{y_1} \quad \text{(ii)}$$

(அ - து) $x_1 = -my_1$.

(x_1, y_1) புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ளதால்,

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2.$$

(அ - து) $m^2y_1^2 + y_1^2 = a^2$

$$y_1^2(1 + m^2) = a^2.$$

$$\therefore \quad 1 + m^2 = \frac{a^2}{y_1^2} \quad \text{(அ - து)} \quad \sqrt{1 + m^2} = \frac{a}{y_1}$$

ஆனல், (ii)-இன் படி $c = \frac{a^2}{y_1} = a\sqrt{1 + m^2}$.

எனவே, $y = mx + c$, $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்குத் தொடு கோடெனில், தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$c = a\sqrt{1 + m^2}.$$

மேலும் $y_1 = \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}$, $x_1 = -my_1 = -\frac{am}{\sqrt{1 + m^2}}$

$\therefore$ கோடு வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி,

$$\left(\frac{-am}{\sqrt{1 + m^2}}, \frac{a}{\sqrt{1 + m^2}}\right).$$

பிறிதொரு முறை

$y = mx + c$ (1) கோட்டிற்கு $x^2 + y^2 = a^2$ (2) வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின்

நீளம் (2)-இன் ஆரத்திற்குச் சமமெனில் கோடு (1), வட்டம் (2)-க்குத் தொடுகோடாகும்.

வட்டம் (2)-இன் ஆரம் a

வட்டம் (2)-இன் மையம் (0, 0)-விலிருந்து $y=mx+c$ கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $\dfrac{c}{\pm\sqrt{1+m^2}}$

$$\therefore \quad a = \frac{c}{\pm\sqrt{1+m^2}}$$

(அ - து) $\quad c = \pm a\sqrt{1+m^2}$

எனவே, தேவையான கட்டுப்பாடு $c = \pm a\sqrt{1+m^2}$.

4·13. ஒரு புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2$ வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக்கூடும்.

புள்ளி (x_1, y_1) எனவும், வட்டம் $x^2+y^2=a^2$ எனவும் கொள்வோம்.

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ $\quad$ (m ஒரு மாறி)

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் சென்றால்,

$$y_1 = mx_1 + a\sqrt{1+m^2}$$

(அ - து) $\quad (y_1 - mx_1)^2 = a^2(1 + m^2)$

$$\therefore \quad m^2(x_1^2 - a^2) - 2x_1y_1m + (y_1^2 - a^2) = 0.$$

இது m-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. எனவே m-க்கு இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. m-இன் ஒவ்வொரு மதிப்புக்கும் ஒரு தொடுகோடாக இரு தொடுகோடுகள் உண்டு.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக் கூடும்.

மாதிரி 6 : $8x - 4y - 7 = 0$ கோட்டிற்கு இணையாக $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$ என்ற வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$$

(அ - து) $(x-1)^2+(y-2)^2=3^2$ ... ... (1)

$3x-4y-7=0$ கோட்டிற்கிணையாக வரையப்படும் தொடுகோடு $3x-4y+k=0$ ஆகும். ... ... (2)

வட்ட மையம் $(1, 2)$-இலிருந்து $3x-4y+k=0$-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$\frac{3(1)-4(2)+k}{\pm\sqrt{3^2+4^2}} \text{ (அ-து) } \frac{k-5}{\pm 5}$$

இது வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாதலால்,

$$\frac{k-5}{\pm 5}=3$$

$$\therefore \quad k=5\pm 15$$

(அ - து) $k=20,\ -10.$

எனவே, தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,

$$3x-4y+20=0$$
$$3x-4y-10=0.$$

மாதிரி 7 : $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளுக்கு $(a, 0)$ புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளின் இயங்குவழி,

$$(x^2+y^2-ax)^2=a^2[y^2+(a-x)^2]$$

என நிறுவுக.

$x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடு

$$y=mx+a\sqrt{1+m^2} \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இத் தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாக $(a, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y-0=-\frac{1}{m}(x-a)$$

(அ து) $y=-\frac{1}{m}(x-a)$ ... ... (2)

இவைகள் இரண்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில், (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழிக் காணச் சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து m-ஐ நீக்கவேண்டும்.

(2)-இலிருந்து $m = \dfrac{a-x_1}{y_1}$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$y_1 = \frac{a-x_1}{y_1}\, x_1 + a\sqrt{1 + \left(\frac{a-x_1}{y_1}\right)^2}$$

(அ-து) $y_1^2 = (a-x_1)x_1 + a\sqrt{y_1^2 + (a-x_1)^2}$

$\therefore\quad (x_1^2 + y_1^2 - ax_1) = a\sqrt{y_1^2 + (a-x_1)^2}$

(அ-து) $(x_1^2 + y_1^2 - ax_1)^2 = a^2[y_1^2 + (a-x_1)^2]$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2[y^2 + (a-x)^2].$$

மாதிரி 8 : $y = mx + c$ கோடு $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் $2b$ எனில், $c^2 = (1 + m^2)(a^2 - b^2)$ என நிறுவுக.

பத்தி 4·11-இன் படி நாணின் நீளம்,

$$\frac{2\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}}{1+m^2}$$

இது $2b$-க்குச் சமமெனில்,

$$\frac{2\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2}}{\sqrt{1+m^2}} = 2b$$

(அ-து) $\sqrt{a^2(1+m^2) - c^2} = b\sqrt{(1+m^2)}$.

$\therefore\quad a^2(1+m^2) - c^2 = b^2(1+m^2)$

$\therefore\quad c^2 = a^2(1+m^2) - b^2(1+m^2)$

(அ-து) $c^2 = (1+m^2)(a^2 - b^2)$.

மாதிரி 9. (1, 2) புள்ளி வழிச் செல்லும் வட்டம் இரண்டு ஆயங்களையும் தொடுகிறதெனில், அவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இது x ஆயத்தைத் தொடுமெனில் (1)-இன் மையத்தின் y ஆயத் தொலை அதன் ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \quad -f = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

(அ-து) $f^2 = g^2 + f^2 - c$ அல்லது $g^2 - c = 0 \ldots \quad (2)$

இவ்வாறே வட்டம் y ஆயத்தைத் தொடு மெனில்,

$g^2 = g^2 + f^2 - c$ அல்லது $f^2 - c = 0 \ldots \quad (3)$

வட்டம் (1), புள்ளி (1, 2) வழிச் செல்லுவதால்,

$$1 + 4 + 2g + 4f + c = 0. \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

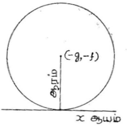
சமன்பாடுகள் (2), (3), (4)-ஐ விடுவிப்பின்,

$$g = -1,\ f = 1,\ c = 1; \quad g = 5,\ f = -5,\ c = 25$$

எனவே, வட்டம்

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0.$$



படம் 32

4·14. செங்கோடு (Normal)

வரையறை : ஒரு வளைவரைக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக P வழிச் செல்லும் நேர்க்கோடு P-யிடத்துச் செங்கோடு எனப்படும்.

4·15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ **வட்டத்திற்கு** $P(x_1, y_1)$ **புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு.**

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \qquad \ldots \quad (1)$$

வட்டத்திற்கு $P(x_1 y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad \ldots (2)$$

(அ - து) $x(x_1 + g) + y(y_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0$

$$\therefore \text{ தொடுகோட்டின் சரிவு } = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}.$$

$$\text{எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு } = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}.$$

செங்கோடு $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்வதால் P யிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}(x - x_1)$$

(அ - து) $-(x_1 + g)(y - y_1) + (y_1 + f)(x - x_1) = 0$

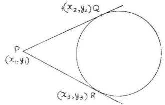
(அ - து) $x(y_1 + f) - y(x_1 + g) + (gy_1 - fx_1) = 0.$

கிளை : $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு $x_1 y - xy_1 = 0.$

4·16. தொடுகோடுகளின் தொடு நாண்-வரையறை (chord of contact of tangents)

ஒரு வட்டத்திற்குப் புறத்தே உள்ள P என்ற புள்ளியிலிருந்து, வட்டத்திற்கு வரையப்படும் PQ, PR என்ற தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் Q, Rஐச் சேர்க்கும் கோடு தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் எனப்படும்.

4·17. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு.



படம் 33.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)

P, Q, R என்ற புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_2 + yy_2 + g(x + x_2) + f(y + y_2) + c = 0$$

இது, $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad x_1x_2 + y_1y_2 + g(x_1 + x_2) + f(y_1 + y_2) + c = 0 \quad \ldots(2)$$

$R(x_3, y_3)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$xx_3 + yy_3 + g(x + x_3) + f(y + y_3) + c = 0$$

இது, $P(x_1 y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad x_1x_3 + y_1y_3 + g(x_1 + x_3) + f(y_1 + y_3) + c = 0 \quad \ldots(3)$$

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad \ldots(4)$$

என்ற சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொள்வோம்.

இச்சமன்பாடு குறிக்கும் கோடு (2)-இன்படி $Q(x_2, y_2)$ வழியும், (3)-இன்படி $R(x_3, y_3)$ வழியும் செல்கிறது.

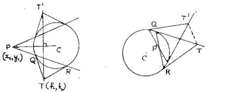
எனவே, QR-இன் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0 \quad \text{ஆகும்.}$$

4·18. இசைப் புள்ளியும், இசைக் கோடும் (Pole and Polar)

வரையறை : வட்டத்தினுள்ளே அல்லது வெளியே உள்ள P புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டினால், Q, R புள்ளிகளிடத்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி, புள்ளி P-யின் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடாகும். P புள்ளி இசைக் கோட்டின் இசைப் புள்ளி எனப்படும்.

4·19. (x_1, y_1) புள்ளியின் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 34.

$P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும் கோடு வட்டத்தை Q, R புள்ளி களில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகள் $T(h, k)$ என்ற புள்ளியில் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

Q, R என்னும் கோடு $T(h, k)$-யிலிருந்து வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண். எனவே, QR-இன் சமன்பாடு,

$$xh + yk + g(x + h) + f(y + k) + c = 0$$

இது $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad x_1h + y_1k + g(x_1 + h) + f(y_1 + k) + c = 0.$$

எனவே, $T(h, k)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$xx_1 + yy_1 + g(x+x_1) + f(y+y_1) + c = 0.$$

கிளை : $x^2+y^2=a^2$ என்ற வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

4·20. $lx + my + n = 0$ **கோட்டிற்கு** $x^2 + y^2 = a^2$ **வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி.**

$$lx + my + n = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

கோட்டின் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.

இப் புள்ளியின் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \qquad \dots \qquad (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டினைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{l}{x_1} = \frac{m}{y_1} = \frac{n}{-a^2}$$

எனவே, $x_1 = \dfrac{-a^2 l}{n}$, $y_1 = \dfrac{-a^2 m}{n}$.

$\therefore$ $lx + my + n = 0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி,

$$\left(\frac{-a^2 l}{n}, \ \frac{-a^2 m}{n}\right).$$

4·21. $P(x_1, y_1)$ **புள்ளியின் இசைக்கோடு** $Q(x_2, y_2)$ **புள்ளி வழிச் செல்லின், Q-வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்.**

$$x^2 + y^2 = a^2 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$xx_1 + yy_1 - a^2 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad x_2x_1 + y_2y_1 - a^2 = 0 \qquad \dots \qquad (3)$$

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் (1)-ஐச் சார்ந்த இசைக்கோடு

$$xx_2 + yy_2 - a^2 = 0 \qquad \dots \qquad (4)$$

இது (3)-இன்படி $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

4·22. துணையியப் புள்ளிகளும், துணையியக் கோடுகளும் (conjugate points, conjugate lines)

ஏதேனும் இரு புள்ளிகளில், ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைக்கோடு மற்றதன் வழிச் செல்லின், அப்புள்ளிகளிரண்டும் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப்புள்ளிகள் எனப்படும்.

ஏதேனும் இரு கோடுகளில், ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைப்புள்ளி மற்றதன் மேலிருப்பின் அவ்விரு கோடுகளும் துணையியக் கோடுகள் எனப்படும்.

4·23. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ **என்ற இருகோடுகளும்** $x^2 + y^2 = a^2$ **வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாக இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு.**

$l_1x + m_1y + n_1 = 0$ என்ற கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

எனவே, பத்தி 4·21-இன் படி $x_1 = \dfrac{-a^2l_1}{n_1}$, $y_1 = \dfrac{-a^2m_1}{n_1}$.

இப் புள்ளி $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் மீதிருப்பின்,

$$l_2\left(\frac{-a^2l_1}{n_1}\right) + m_2\left(\frac{-a^2m_1}{n_1}\right) + n_2 = 0$$

$$\therefore \; a^2 - l_1l_2 - a^2m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$$

(அ-து) $a^2l_1l_2 + a^2m_1m_2 = n_1n_2$

கோடு l-இன் இசைப் புள்ளி கோடு l'-இல் இருப்பின், l'-இன் இசைப்புள்ளி கோடு l-இல் இருக்கும்.

4·24. குறியீட்டு முறை (Notation)

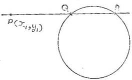
$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில்,

$S_1 \equiv x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$,

$T \equiv xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$

எனக் கொள்வோம்.

4·25. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்.



படம் 35.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos \theta} = \frac{y - y_1}{\sin \theta} = r \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta, y_1 + r\sin\theta)$ ஆகும்.

இக் கோடு வட்டத்தைச் சந்திக்குமிடங்களில்,

$$(x_1 + r\cos\theta)^2 + (y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0.$$

(அ-து) $r^2 + 2r[(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta] + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \quad \dots(2)$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. எனவே, r இரு மதிப்புக்கள் கொண்டிருக்கும். அவைகளை r_1, r_2 எனக் கொண்டால், r_1, r_2 என்பவை P-யிலிருந்து கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான Q, R-இன் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

Q, R புள்ளிகள் Q வில் பொருந்தும் புள்ளிகளெனில் நாண் QR, Q இடத்துத் தொடுகோடாகும்.

$$\therefore \quad r_1 = r_2.$$

(அ-து) சமன்பாடு (௨)-இன் மூலங்கள் சமம். எனவே, (௨)-இன் தன்மைக் காட்டி (discriminant) பூச்சியமாகும்.

எனவே, $4[(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta]^2$
$$= 4(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$$

(அ-து) $[(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta]^2 = S_1 \quad \ldots \quad (3)$

(1)-இலிருந்து $\cos\theta = \dfrac{x - x_1}{r}, \quad \sin\theta = \dfrac{y - y_1}{r}.$

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்

$$\left[(x_1 + g)\frac{x - x_1}{r} + (y_1 + f)\frac{y - y_1}{r}\right]^2 = S_1$$

(அ-து) $[(x - x_1)(x_1 + g) + (y_1 + f)(y - y_1)]^2 = r^2 S_1$
$$= [(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2]\, S_1$$

(அ-து) $[(xx_1 + yy_1 + gx + fy) - (x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1)]^2$
$$= [(x^2 + y^2) + (x_1^2 + y_1^2) - 2(xx_1 + yy_1)]\, S_1$$

(அ-து) $[(xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c)$
$$- (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)]^2$$

$$= \{(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) + (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) - 2[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]\}\, S_1$$

$$\therefore \quad [T - S_1]^2 = [S + S_1 - 2T]\, S_1$$

$$T^2 + S_1^2 - 2TS_1 = SS_1 + S_1^2 - 2TS_1$$

(அ-து) $T^2 = SS_1$

எனவே, இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

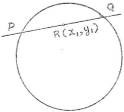
$$T^2 = SS_1$$

(அல்லது)

$$[xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c]^2$$
$$= (x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c)(x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c)$$

4·26. (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட வட்டத்தின் நாண் வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

நாண் PQ, அதன் நடுப் புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 36.

$R(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்போம்.

இக் கோட்டின்மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள், $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$.

இக் கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டும் எனக் கொள்வோம். வட்டத்தை வெட்டுமிடங்களில்,

$$(x_1 + r\cos\theta)^2 + (y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0.$$

(அ-து) $r^2 + 2[(x_1 + g)\cos\theta + (y_1 + f)\sin\theta]r + (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c) = 0 \quad \ldots (2)$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், r இரு மதிப்புக்கள் கொண்டிருக்கும். அவை r_1, r_2 என்போம். r_1, r_2 என்பவை (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து Q, P புள்ளிகளின் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

PQ-வின் நடுப்புள்ளி $(x_1 y_1)$ ஆதலால்,

$$r_1 + r_2 = 0.$$

(அ - து) சமன்பாடு (2)-இன் மூலங்களின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad (x_1 + g) \cos\theta + (y_1 + f) \sin\theta = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-இலிருந்து $\frac{x - x_1}{r} = \cos\theta, \quad \frac{y - y_1}{r} = \sin\theta$

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$(x_1 + g)\left(\frac{x - x_1}{r}\right) + (y_1 + f)\left(\frac{y - y_1}{r}\right) = 0$$

(அ - து) $(x_1 + g)(x - x_1) + (y_1 + f)(y - y_1) = 0$

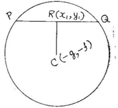
$$\therefore \quad xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்ட,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

(அ - து) $T = S_1$.

பிறிதொரு முறை



படம் 37.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ எனில்,

வட்ட மையம் $(-g, -f)$

c வட்டமையம் எனவும், நாண் PQ எனவும் கொள்வோம்.

நாணின் நடுப் புள்ளி $R(x_1, y_1)$

$$CR\text{-இன் சரிவு} = \frac{y_1 + f}{x_1 + g}$$

$$\therefore \quad PQ\text{-வின் சரிவு} = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f} \quad (\because PQ \perp CR)$$

$\therefore$ PQ-வின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1)$$

(அ - து) $(x - x_1)(x_1 + g) + (y - y_1)(y_1 + f) = 0.$

$\therefore \quad xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்ட,

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

(அ - து) $T = S_1$.

மாதிரி 10: $x + 7y - 11 = 0$, $3x + y - 2 = 0$ என்ற கோடுகள் $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்து துணையியக் கோடுகள் என நிறுவுக.

$$x + 7y - 11 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0 \quad \ldots \quad (2)$ வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடு.

$$xx_1 + yy_1 - 3(x + x_1) - 3(y + y_1) + 5 = 0.$$

(அ-து) $x(x_1 - 3) + y(y_1 - 3) - (3x_1 + 3y_1 - 5) = 0 \quad (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1 - 3}{1} = \frac{y_1 - 3}{7} = \frac{3x_1 + 3y_1 - 5}{11}$$

முதலிரு விகிதங்களிலிருந்து $7x_1 - 21 = y_1 - 3$

(அ-து) $7x_1 - y_1 = 18$ ... ... (4)

இரண்டாவது மூன்றுவது விகிதங்களிலிருந்து,

$$11y_1 - 33 = 21x_1 + 21y_1 - 35$$

(அ-து) $21x_1 - 10y_1 = 2$ ... ... (5)

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ விடுவிப்பின் $x_1 = 2$, $y_1 = -4$.

எனவே, கோடு (1)-இன் வட்டம் (2) ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளி $(2, -4)$.

இப் புள்ளி $3x + y - 2 = 0$ என்ற கோட்டின் மீதுள்ளது கண்கூடாகும்.

எனவே, $x + 7y - 11 = 0$, $3x + y - 2 = 0$ என்பவை வட்டம் (2)-ஐச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாகும்.

மாதிரி 11 : $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் நாண் (h, k) புள்ளியில் செங்கோணத்தை ஏற்குமெனில், அந்நாணின் இசைப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

நாண் AB எனவும், அதன் இசைப்புள்ளி $(x_1 y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.

$(x_1 y_1)$ புள்ளியின் $x^2 + y^2 = a^2$ ... ... (1)

வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$.

(அ-து) AB-யின் சமன்பாடு $xx_1 + yy_1 - a^2 = 0$....(2)

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளைப் பெறலாம். வெட்டும் புள்ளிகள் A, B ஆகும். அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x_2, y_2), (x_3, y_3) என்போம்.

(2)-இலிருந்து $y = \dfrac{a^2 - xx_1}{y_1}$

இதை (1)-இல் பிரதியிட $x^2 + \left(\dfrac{a^2 - xx_1}{y_1}\right)^2 = a^2$

(அ - து) $x^2(x_1^2 + y_1^2) - 2a^2x_1x + a^2(a^2 - y_1^2) = 0$. இது x-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் மூலங்கள் A, B புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளாகும்.

$$\therefore \quad x_2 + x_3 = \frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (i)}; \quad x_2x_3 = \frac{a^2(a^2 - y_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} \text{ (ii)}$$

இவ்வாறே $y_2 + y_3 = \frac{2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2}$ (iii); $y_2y_3 = \frac{a^2(a^2 - x_1^2)}{x_1^2 + y_1^2}$ (iv).

$C(h, k)$ புள்ளியில் AB ஏற்கும் கோணம் $90°$ ஆதலின் CA, CB கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை.

CA-இன் சரிவு $\frac{y_2 - k}{x_2 - h}$

CB-இன் சரிவு $\frac{y_3 - k}{x_3 - h}$.

$$\therefore \quad \frac{y_2 - k}{x_2 - h} \cdot \frac{y_3 - k}{x_3 - h} = -1 \quad [\because \; CA \perp CB]$$

(அ - து) $(x_2 - h)(x_3 - h) + (y_2 - k)(y_3 - k) = 0$.

(அ - து) $x_2x_3 - h(x_2 + x_3) + h^2 + y_2y_3 - k(y_2 + y_3) + k^2 = 0$

இதில் (i), (ii), (iii), (iv)-ஐப் பிரதியிடின்,

$$\frac{a^2(a^2 - y_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} - h\frac{2a^2y_1}{x_1^2 + y_1^2} + h^2 + \frac{a^2(a^2 - x_1^2)}{x_1^2 + y_1^2} - k\frac{2a^2x_1}{x_1^2 + y_1^2} + k^2 = 0.$$

(அ - து) $(h^2 + k^2)^4(x_1^2 + y_1^2) - 2a^2(x_1k + y_1h) - a^2(x_1^2 + y_1^2 - 2a^2) = 0$

(அ-து) $(x_1^2 + y_1^2)(h^2 + k^2 - a^2) - 2a^2(x_1k + y_1h - a^2) = 0$.

எனவே, (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி

$$(x^2 + y^2)(h^2 + k^2 - a^2) = 2a^2(xk\ yh + a^2).$$

மாதிரி 12 : ஒரு புள்ளியிலிருந்து $(x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்து எனில், அப்புள்ளியின் இயங்கு வழி $x^2+y^2+2gx+2fy+2c-g^2-f^2=0$ என நிறுவுக.

வட்டம் $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... ... **(1)**

புள்ளி $P(x_1y_1)$-யிலிருந்து வட்டம் (1)-க்குத் தொடுகோடுகள் வரையப்பட்டுள்ளன எனக் கொள்வோம்.

இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு,

$$T^2 = SS_1$$

(அ-து) $[xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c]^2$
$=(x^2+y^2+2gx+2fy+c)(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)$.

இதில் x^2-இன் கெழு $=(x_1+g)^2-(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)$.

y^2-இன் கெழு $=(y_1+f)^2-(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)$.

இரட்டைத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டிக் கொள்ளுமெனின்,

x^2-இன் கெழு $+$ y^2-இன் கெழு $=0$.

$$\therefore\ (x_1+g)^2+(y_1+f)^2-2(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)=0$$

(அ-து) $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2$
$$=2(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)$$

$$x_1{}^2\ y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+g^2+f^2$$
$$=2(x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+c)$$

$$\therefore\ x_1{}^2+y_1{}^2+2gx_1+2fy_1+2c-g^2-f^2=0$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$x^2+y^2+2gx+2fy+2c-g^2-f^2=0$$

மாதிரி 13 : $x^2+y^2-5x+y-14=0$ வட்டத்திற்கு $(2,-5)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடும், செங்கோடும் காண்க.

வட்டம் $x^2+y^2-5x+y-14=0$.

(அ - து) $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$x.2 + y(-5) - \frac{5}{2}(x+2) + \frac{1}{2}(y-5) - 14 = 0$$

(அ - து) $2x - 5y - \frac{5}{2}x - 5 + \frac{1}{2}y - \frac{5}{2} - 14 = 0$

(அ - து) $4x - 10y - 5x - 10 + y - 5 - 28 = 0$

(அ - து) $x + 9y + 43 = 0.$

எனவே, $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$x + 9y + 43 = 0.$$

தொடுகோட்டின் சரிவு $= -\frac{1}{9}$

எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு $= 9.$

$\therefore$ $(2, -5)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y + 5 = 9(x - 2)$$

(அ - து) $9x - y - 23 = 0.$

மாதிரி 14 : $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த (h, k) புள்ளியின் இசைக்கோடு $(x-a)^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைத் தொடுமெனில், $a^2-2ah-k^2 = 0$ என நிறுவுக.

$x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த (h, k) புள்ளியின் இசைக் கோடு $xh+yk-a^2=0$ ... ... (1)

இது $(x-a)^2+y^2=a^2$ ... ... (2) வட்டத்தைத் தொடுமெனின் (2)-இன் மையத்திலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் (2)-இன் ஆரத்திற்குச் சமம்.

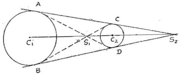
$$\therefore \quad \frac{ah+0-a^2}{\sqrt{h^2+k^2}} = a$$

(அ - து) $a(h-a) = a\sqrt{h^2+k^2}$

$$\therefore \quad (h-a)^2 = h^2 + k^2$$

(அ - து) $a^2 - 2ah - k^2 = 0.$

4·27. இரு வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகள்.



படம் 38

கொடுத்துள்ள இரு வட்டங்களின் மையங்கள் c_1, c_2 எனவும், ஆரங்கள் r_1, r_2 எனவும் கொள்வோம்.

AC, *BD* என்ற கோடுகள் நேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகள் (direct common tangents) எனவும், மற்ற இரு கோடுகள் குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகள் (transverse common tangents) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடுகள் மையங்கள் சேர்க்கும் c_1c_2 என்ற கோட்டை S_2 புள்ளியிலும், குறுக்குப் பொதுத் தொடு கோடுகள் S_1 புள்ளியிலும் வெட்டுகின்றன என்போம். S_1, S_2 முறையே உள்வடிவொப்பமையம் (internal centre of similitude), வெளி வடிவொப்பமையம் (external centre of similitude) எனப் படுகின்றன. S_1, S_2 புள்ளிகள் C_1C_2 கோட்டை முறையே உள்ளும் புறமும் ஆரங்களின் விகிதத்தில் பிரிக்கின்றன.

4·28. துணை அலகு விளக்கம் (Parametric representation)

ஆதியை மையமாகவும், ஆரம் a அலகும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$ என நாம் கண்டோம்.

வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியை ஆதியுடன் சேர்க்கும் கோடு x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனில், P-யின் ஆயத் தொலைகள் $(a \cos \theta, \ a \sin \theta)$ ஆகும். θ-வின் மதிப்புத் தெரியுமாயின் P-யின் நிலையை நாம் அறியலாம். எனவே, பரிதியின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியைப் புள்ளி θ எனச் சுருக்கமாக நாம் குறிப்பிடலாம். இம் முறை துணை அலகு விளக்கம் எனப்படும்.

4·29. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ள θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு

θ, ϕ புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(a\cos\theta, a\sin\theta)$, $(a\cos\phi, a\sin\phi)$ இப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-a\sin\theta}{a\sin\theta-a\sin\phi}=\frac{x-a\cos\theta}{a\cos\theta-a\cos\phi}$$

(அ - து) $y-a\sin\theta$

$$=\frac{\sin\theta-\sin\phi}{\cos\theta-\cos\phi}(x-a\cos\theta)$$

$$=\frac{2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}}{-2\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}}(x-a\cos\theta)$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{-\sin\frac{\theta+\phi}{2}}(x-a\cos\theta)$$

$$\therefore\quad -y\sin\frac{\theta+\phi}{2}+a\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$=x\cos\frac{\theta+\phi}{2}-a\cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2}$$

(அ - து) $x\cos\frac{\theta+\phi}{2}+y\sin\frac{\theta+\phi}{2}$

$$=a\left[\cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}\right]$$

$$=a\cos\left(\theta-\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$=a\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

எனவே, $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ள θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$x\cos\frac{\theta+\phi}{2}+y\sin\frac{\theta+\phi}{2}=a\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

கிளை 1 : $x\cos\frac{\theta+\phi}{2}+y\sin\frac{\theta+\phi}{2}=a\cos\frac{\theta-\phi}{2}$. இதில் $\phi=\theta$ எனின், இரு புள்ளிகளும் பொருந்தும் புள்ளிகளாகும். எனவே, θ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$x\cos\frac{\theta+\theta}{2}+y\sin\frac{\theta+\theta}{2}=a\cos\frac{\theta-\theta}{2}$$

(அ-து) $x\cos\theta+y\sin\theta=a$.

கிளை 2 : $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ எனும் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடு,

$$(x-h)\cos\theta+(y-k)\sin\theta=r \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 15 : $x^2+y^2-2x-6y+9=0$, $x^2+y^2+6x-2y+1=0$ வட்டங்களின் பொதுத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

$$x^2+y^2-2x-6y+9=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(1)-இன் மையம் $C_1(1, 3)$, ஆரம் $r_1=\sqrt{1+9-9}=1$.

$$x^2+y^2+6x-2y+1=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(2)-இன் மையம் $C_2(-3, 1)$, ஆரம் $r_2=\sqrt{9+1-1}=3$.

C_1C_2 = மையங்களுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

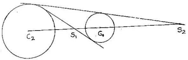
$$= \sqrt{(1+3)^2+(3-1)^2}=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$$
$$= 2\sqrt{5}$$

r_1+r_2 = ஆரங்களின் கூட்டுத்தொகை $=1+3=4$.

$$C_1C > r_1+r_2$$

எனவே, வட்டங்கள் வெட்டிக்கொள்ளா.

∴ இவ் வட்டங்களுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகள் நான்கு உண்டு.



படம் 39.

c_1, c_2 கோட்டை S_1 உள்ளும் S_2 புறமும் $3:1$ விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

$$x = \frac{3(1)+1(-3)}{3+1} = 0, \quad y = \frac{3(3)+(1)1}{3+1} = \frac{5}{2}.$$

$$x = \frac{3(1)-1(-3)}{3-1} = 3, \quad y = \frac{3(3)-1(1)}{3-1} = 4.$$

எனவே, S_1, S_2 புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $\left(0, \frac{5}{2}\right)$, $(3, 4)$

S_1 புள்ளியிலிருந்து ஏதேனும் ஒரு வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளாகும்.

அவைகளின் சமன்பாடு $T^2 = SS_1$.

$$\left[x(0)+y\left(\frac{5}{2}\right)-1(x+0)-3\left(y+\frac{5}{2}\right)+9\right]^2$$

$$= (x^2+y^2-2x-6y+9)\left(0+\frac{25}{4}-0-15+9\right).$$

(அ - து) $(2x+y-3)^2 = (x^2+y^2-2x-6y+9)$

இதைச் சுருக்கின், $3x^2+4xy-10x=0$

(அ - து) $x(3x+4y-10)=0$.

எனவே, குறுக்குப் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள், $x=0$, $3x+4y-10=0$.

$S_3(3, 4)$ புள்ளியிலிருந்து யாதேனும் ஒரு வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் நேர்ப்பொதுத் தொடுகோடுகளாகும்.

அவைகளின் சமன்பாடு, $T^2 = SS_1$

$$(\text{அ-து}) \quad [3.x + y.4 - (x+3) - 3(y+4) + 9]^2$$
$$= (x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9)(9 + 16 - 6 - 24 + 9)$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$3y^2 - 4xy + 16x - 12y = 0,$$

$$\therefore \ (y-4)(3y-4x) = 0$$

எனவே, நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y - 4 = 0, \ 3y - 4x = 0.$$

விறிதொரு முறை

வட்டம் (1)-க்குத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு,

$$(x-1)\cos\theta + (y-3)\sin\theta = 1 \quad \ldots \quad (1)$$

இக்கோடு வட்டம் (2)-ஐத் தொடுவதற்குரிய கட்டுப்பாடு,

$$(-3-1)\cos\theta + (1-3)\sin\theta - 1 = \pm 3.$$

$$(\text{அ-து}) \quad 2\cos\theta + \sin\theta = 1 \ (\text{அ-து}) \ -2.$$
$$2\cos\theta + \sin\theta = 1$$

$$\therefore \quad 4\cos^2\theta = (1 - \sin\theta)^2$$

$$(\text{அ-து}) \quad 4(1 - \sin^2\theta) = (1 - \sin\theta)^2$$

$$\therefore \quad 5\sin^2\theta - 2\sin\theta - 3 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad \sin\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{10} = 1 \ (\text{அ-து}) \ \frac{-3}{5}.$$

$$\therefore \quad \cos\theta = 0 \ (\text{அ-து}) \ \frac{4}{5}.$$

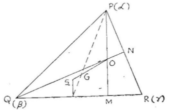
இம் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடின் தொடுகோட்டின் சமன்பாடுகள்,

$y = 4, \ 3y - 4x = 0$ எனக் கிடைக்கும்.

இவ்வாறே $2\cos\theta + \sin\theta = -2$ சமன்பாட்டிலிருந்து மற்ற இரு தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்,

$$x = 0,\ 3x + 4y - 10 = 0 \text{ கிடைக்கப் பெறும்.}$$

மாதிரி 16 : $(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $(a\cos\beta, a\sin\beta)$, $(a\cos\gamma, a\sin\gamma)$ உச்சிகளைக் கொண்ட ஒரு முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சந்தி (orthocentre), $[a(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma), a(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)$ என நிறுவுக. மேலும் சுற்றுவட்ட மையத்தையும் (circumcentre), குத்துக் கோட்டுச் சந்தியையும் சேர்க்கும் கோட்டை மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid) 1 : 2 விகிதத்தில் பிரிக்கும் என நிறுவுக.



படம் 40.

$P(a\cos\alpha, a\sin\alpha)$, $Q(a\cos\beta, a\sin\beta)$, $R(a\cos\gamma, a\sin\gamma)$ எனக் கொள்வோம்.

PM, QN முறையே QR, RP கோடுகளுக்குச் செங்குத்தாக வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி குத்துக்கோட்டுச் சந்தி (O) ஆகும்.

QR-இன் சரிவு,

$$= \frac{a\sin\gamma - a\sin\beta}{a\cos\gamma - a\cos\beta} = \frac{\sin\gamma - \sin\beta}{\cos\gamma - \cos\beta}$$

$$= \frac{2\cos\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}}{-2\sin\frac{\gamma+\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}} = -\frac{\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\beta}{2}}.$$

இவ்வாறே RP-இன் சரிவு,

$$= -\frac{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}}.$$

எனவே, PM, QN கோடுகளின் சரிவு முறையே,

$$\frac{\sin\frac{\gamma+\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma+\beta}{2}},\quad \frac{\sin\frac{\beta+\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta+\alpha}{2}}.$$

$\therefore$ PM-இன் சமன்பாடு,

$$y-a\sin\alpha = \frac{\sin\frac{(\gamma+\beta)}{2}}{\cos\frac{\gamma+\beta}{2}}[x-a\cos\alpha]$$

(அ-து) $y\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)-x\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$

$$= a[\sin\alpha\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta)-\cos\alpha\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\beta)]$$

$$= a\sin\frac{2\alpha-\gamma-\beta}{2}$$

(அ-து) $x\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)-y\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$

$$= a\sin\left[\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right] \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறே QN-இன் சமன்பாடு,

$$x\sin\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)-y\cos\tfrac{1}{2}(\gamma+\alpha)=a\sin\left[\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right] \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவிப்பின் குத்துக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத்தொலைகள் கிடைக்கும்.

(1)-ஐ $\cos\frac{(\gamma+\alpha)}{2}$ ஆல் பெருக்க,

$$x\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

$$-y\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$$

$$=a\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma) \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-ஐ $\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$ ஆல் பெருக்க,

$$x\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$$

$$-y\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)$$

$$=a\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta) \quad \ldots \quad (4)$$

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$x[\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$-\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)]$$

$$=a[\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}-\alpha\right)\cos\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)$$

$$-\sin\left(\frac{\gamma+\alpha}{2}-\beta\right)\cos\frac{1}{2}(\gamma+\beta)]$$

$$\therefore\ x\sin\left[\frac{\gamma+\beta}{2}-\frac{\alpha+\gamma}{2}\right]$$

$$=a\left\{\left[\frac{\sin\left(\frac{\beta+2\gamma-\alpha}{2}\right)+\sin\left(\frac{\beta-3\alpha}{2}\right)}{2}\right]\right.$$

$$\left.-\left[\frac{\sin\frac{2\gamma+\alpha-\beta}{2}+\sin\frac{\alpha-3\beta}{2}}{2}\right]\right\}$$

$$(\text{அ - து}) \quad x \sin \frac{1}{2}(\beta - \alpha) = \frac{a}{2}\Big[\sin \frac{1}{2}(\beta + 2r - \alpha)$$

$$+ \sin \frac{1}{2}(\beta - 3\alpha) - \sin \frac{1}{2}(2\gamma + \alpha - \beta) + \sin \frac{1}{2}(\alpha - 3\beta) \Big]$$

$$= \frac{a}{2}\Big[\sin \frac{1}{2}(\beta + 2\gamma - \alpha) - \sin \frac{1}{2}(2\gamma + \alpha) - \beta)$$

$$+ \sin \frac{1}{2}(\beta - 3\alpha) + \sin \frac{1}{2}(\alpha - 3\beta) \Big]$$

$$= \frac{1}{2}\Big[a \; \{2 \cos \gamma \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin (\beta - \alpha)\} \Big]$$

$$= a \Big[\cos \gamma \sin \frac{\beta - \alpha}{2} + \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \; 2 \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} \Big]$$

$$= a \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \Big[\cos \gamma + 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \Big]$$

$$= a \sin \frac{\beta - \alpha}{2} \; [\cos \gamma + \cos \beta + \cos \alpha]$$

$$\therefore \; x = a (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma)$$

இவ்வாறே $y = a (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)$.

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள்,

$O[a (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma), \; a(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)]$.

PQR முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் (circumcircle) $x^2 + y^2 = a^2$ ஆகும்.

எனவே, அதன் மையம் $S(0, 0)$.

$S(0, 0)$-த்தையும், O-த்தையும் சேர்க்கும் கோட்டை $1:2$ விகிதத்தில் பிரிக்கும் புள்ளி,

$$\left(\frac{1 . a (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) + 2.0}{1 + 2}, \right.$$

$$\left. \frac{1 . a (\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) + 2.0}{1 + 2} \right).$$

(அ - து) $\left[\frac{a}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma),\right.$

$\left.\frac{a}{3}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma)\right]$

இவை மையக் கோட்டுச் சந்தி G-யின் ஆயத் தொலைகளாம்.

$\therefore$ சுற்று வட்ட மையத்தைக் குத்துக் கோட்டுச் சந்தியுடன் சேர்க்கும் கோட்டை, மையக் கோட்டுச் சந்தி 1:2 விகிதத்தில் பிரிக்கும்.

மாதிரி 17 : $P(x_1 y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் α எனும் மாறிலி எனில், $P(x_1 y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி யாது?

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகள், $T^2 = SS_1$,

(அ - து) $(xx_1 + yy_1 - a^2)^2 = (x^2 + y^2 - a^2)(x_1^2 + y_1^2 - a^2)$.

இதில் x^2, y^2, xy என்ற உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் முறையே $a^2 - y_1^2$, $a^2 - x_1^2$, $2x_1y_1$ ஆகும்.

$$\therefore \quad \tan\alpha = \frac{\pm 2\sqrt{(x_1y_1)^2 - (a^2 - y_1^2)(a^2 - x_1^2)}}{(a^2 - y_1^2) + (a^2 - x_1^2)}$$

(அ - து) $(2a^2 - x_1^2 - y_1^2)^2 \tan^2\alpha = 4[x_1^2 y_1^2 - a^4 + a^2x_1^2 + a^2y_1^2 - x_1^2y_1^2]$

(அ - து) $(2a^2 - x_1^2 - y_1^2)\tan^2\alpha = 4a^2[x_1^2 + y_1^2 - a^2]$

எனவே, (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி,

$$(2a^2 - x^2 - y^2)\tan^2\alpha = 4a^2(x^2 + y^2 - a^2).$$

4·30. துணையிய விட்டங்கள் (Conjugate Diameters)

ஒரு வட்டத்தின் இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்றதன் இணை கோடுகளை இரு சமமாகப் பிரிக்கு மெனின், அவ்விரு விட்டங்களும் குறிப்பிட்ட வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையிய விட்டங்கள் எனப் படும்.

$x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் இரு விட்டங்கள் $y = m_1x$, $y = m^2x$ எனக் கொள்வோம். இவை துணையிய விட்டங்களெனின் ஒன்று மற்றதை இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

$y = m_2x$-க்கு இணையாக இருக்கும் கோட்டின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொண்டால், அதன் சமன்பாடு,

$$xx_1 + yy_1 = a^2.$$

$$\text{இதன் சரிவு} = \frac{-x_1}{y_1}$$

$$\therefore \frac{-x_1}{y_1} = m_2$$

(அ-து) $m_2y_1 + x_1 = 0.$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$m_2y + x = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$\text{இதன் சரிவு} = -\frac{1}{m_2}$$

ஆனால் $y = m_1x$ விட்டமும் சமன்பாடு (1) குறிக்கும் கோடும் ஒன்றேயாகும்.

$$\therefore m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

(அ-து) $m_1m_2 = -1.$

$\therefore$ $y = m_1x$, $y = m_2x$ துணையிய விட்டங்கள் எனில், $m_1m_2 = -1.$

பயிற்சி 4.2.

1. $(x-a)^2 + (y-b)^2 = c^2$ வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் காண்க.

2. $x^2 + y^2 + 2ax + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2bx + c = 0$ என்ற வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமெனில், $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}$ என நிறுவுக.

3. $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$ வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று தொடுமென நிறுவித் தொடுபுள்ளியைக் காண்க.

4. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் நாணின் சமன்பாடு $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ எனின், இந் நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 - a^2 - 2p(x \cos \alpha + y \sin \alpha - p) = 0$$

என நிறுவுக.

5. $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$, $lx + my + n = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளும், $x^2 + y^2 + g'x + f'y + c' = 0$, $l'x + m'y + n' = 0$ வெட்டும் புள்ளிகளும் ஒரே வட்டத்தின்மீது அமைந்திருப்பின்,

$$\begin{vmatrix} g-g' & f-f' & c-c' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix} = 0$$ என நிறுவுக.

6. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டத்திற்கு $3x - 4y = 1$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க. தொடுபுள்ளிகளையும் காண்க.

7. $x^2 + y^2 = 16$, $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ வட்டங்கள் தம்முள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன என நிறுவுக. மெய்யான பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

8. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு $lx + my + n = 0$ தொடுகோடாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு என்ன ?

9. $4x^2 + 4y^2 - 9 = 0$, $9x^2 + 9y^2 - 16 = 0$ வட்டங்களுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் நீளம் $3:4$ விகிதத்திலிருப்பின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

10. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 7 = 0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $2x - 3y + 10 = 0$ கோட்டின் இசைப் புள்ளி காண்க.

11. ஒரு வட்டம் x ஆயத்தைத் தொடும். இது y ஆயத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் $2k$ எனில், அவ் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி $y^2 - x^2 = k^2$ என நிறுவுக.

12. ஒரு வட்டத்திற்கு வரையும் நாண்கள் மற்றொரு வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளெனில், அந் நாணின் முனைகளில் வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

13. $y = x - 1$ கோட்டில் $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$ வட்டம் ஏற்படுத்தும் நாணின் நடுப் புள்ளி காண்க.

14. $A(2, 2)$, $B(5, 3)$, $C(3, -1)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(4 + \sqrt{5}\cos\theta,\ 1 + \sqrt{5}\sin\theta)$ என்ற வடிவில் எழுதலாம் என நிறுவுக. AP, BC-க்குச் செங்குத்துக் கோடெனில், P-யின் ஆயத் தொலைகள் யாவை ?

15. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c\sin^2\alpha + (g^2 + f^2)\cos^2\alpha = 0$ வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளுக்கிடையே உள்ள கோணம் 2α என நிறுவுக.

16. $x^2 + y^2 = 1$, $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ என்ற வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் பொதுத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

17. P என்ற புள்ளியின் ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோடு மற்றொரு வட்டத்தின் தொடுகோடெனில், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

18. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $(x + \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = k^2$ என்ற வட்டத்தின் மீதுள்ள புள்ளிகளின் இசைக்கோடு $(ax + by + c)^2 = k^2(x^2 + y^2)$ வளைவயரையைத் தொடும் என நிறுவுக.

19. $x^2 + y^2 = 100$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $(-9, 12)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு அவ்வட்டத்தை வெட்டும் என நிறுவுக. இசைக்கோடு வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் காண்க.

20. ஒரு வட்டம் $(-1, 1)$, $(0, 6)$, $(5, 5)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது. ஆதியை வட்ட மையத்துடன் சேர்க்கும் கோட்டிற்கிணையாக அவ் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகளைக் காண்க.

21. $3x^2 + 8y^2+24x - 8y+15 = 0$ வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க. ஆதியிலிருந்து மிகத் தொலைவில் உள்ள வட்டப் புள்ளியைக் காண்க. $2x-y+3=0$ வட்டத்தில் ஏற்படுத்தும் நாணின் நீளம் என்ன ?

22. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்திற்கு P-யிலிருந்து வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் வட்ட மையத்தில் தாங்கும் கோணம் 90° எனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

23. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ வட்டத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் $(gx+fy)^2=c(x^2+y^2)$ என நிறுவுக. அத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனில் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி என்ன ?

24. $x^2 + y^2 - 14x + 25 = 0$ வட்டத்திற்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை என நிறுவுக.

25. (p, q) புள்ளி வழிச் செல்லும் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் நாண்கள் தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி,

$$(x^2 + y^2) = (px + qy)$$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $(x'-a)^2 + (y'-b)^2 = c^2$. 3. $\left(\frac{-17}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

6. $3x-4y+10=0$; $3x-4y=0$; $\left(\frac{2}{5}, \frac{14}{5}\right)$. 14. $(6,0)$.

16. $y-1=0$; $x+1=0$; $3x+4y-5=0$; $4x-3y-5=0$.

17. $x^2+y^2=a^2$, $(x-h)^2+(y-k)^2=b^2$ வட்டங்களெனில், $b^2(x^2+y^2)=(hx+ky-a^2)^2$. 19. $\frac{20\sqrt{5}}{3}$. 20. $(5, 1)$; $(-1, 5)$. 21. $\left(\frac{-3}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{-9}{4}, \frac{3}{4}\right)$; $\sqrt{\frac{17}{10}}$.

22. $x^2 + y^2 = 2a^2$.

5. ஒருநிலை வட்டங்கள்

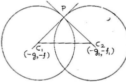
(System of Circles)

5·1. இருவளை வரைகளுக்கிடையேயுள்ள கோணம்

இரு வளை வரைகளுக்கு இடையேயுள்ள கோணம் அவைகள் வெட்டும் புள்ளியில் அவைகளுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணமாகும். இக் கோணம் 90° எனில் அவ் வளைவரைகள் செங்குத்தாக வெட்டிக்கொள்கின்றன எனப்படுகிறது.

இரு வட்டங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணம் 90° எனில் அவை செங்குத்து வட்டங்கள் (orthogonal circles) எனப்படும்.

5·2. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, $x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$ **வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு.**



படம் 41.

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனக்கொள்வோம்.

இவைகள் P புள்ளியில் வெட்டுகின்றன எனவும், மையங்கள் c_1, c_2 எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, c_1, c_2-வின் ஆயத்தொலைகள் $(-g_1, -f_1), (-g_2 - f_2)$ வட்டங்கள் (1), (2)-இன் ஆரங்கள் முறையே,

$$\sqrt{g_1^2 + f_1^2 - c_1}\ ,\ \sqrt{g_2^2 + f_2^2 - c_2},$$

இரு வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாதலின் P புள்ளியிடத்து அவைகளுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தானவை. எனவே, இத் தொடுகோடுகளுக்குச் செங்குத்தான C_1P, C_2P என்ற ஆரங்கள் தம்முள் செங்குத்தானவையாகும்.

$\therefore$ C_1C_2P ஒரு செங்கோண முக்கோணம்.

எனவே, $C_1C_2^2 = C_1P^2 + C_2P^2$

(அ-து) $(-g_1 + g_2)^2 + (-f_1 + f_2)^2 = (g_1^2 + f_1^2 - c_1) + (g_2^2 + f_2^2 - c_2)$

(அ-து) $2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$.

எனவே, இரு வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்களாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2.$$

மாதிரி 1 :
$$x^2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0$$
$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0$$

வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

$$x_2 + y^2 + 2x + 4y + 1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$
$$2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$
$$x^2 + y^2 - 2x + 6y - 3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இம் மூன்று வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டம்,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

எனக் கொள்வோம்.

எனவே, பத்தி 5·2-இன்படி,

$$2g(1) + 2f(2) = c + 1$$

$$2g\left(\frac{3}{2}\right) + 2f(2) = c - \frac{3}{2}$$

$$2g(-1) + 2f(3) = c - 3$$

(அ - து) $2g + 4f - c = 1$

$$6g + 8f - 2c = -3$$

$$2g - 4f + c = 3$$

இவைகளை விடுவிப்பின் $g = -\frac{5}{2},\ f = -7,\ c = -34.$

எனவே, தேவையான வட்டம் $x^2+y^2-5x-14y-34=0.$

மாதிரி 2 : $y = mx + b$ கோட்டைத் தொடுகோடாகக் கொண்ட இரு வட்டங்கள் ஒவ்வொன்றும் $(0, k)$, $(0, -k)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன. இவை செங்குத்து வட்டங்களெனில் $k^2(2+m^2) = b^2$ என நிறுவுக.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

வட்டம் $(0, k)$, $(0, -k)$ புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது எனின்,

$$0+k^2+0+2fk+c=0 \quad (\text{அ-து}) \quad k^2+2kf+c=0 \ \dots \quad (2)$$

$$0+k^2+0-2fk+c=0 \quad (\text{அ-து}) \quad k^2-2kf+c=0 \ \dots \quad (3)$$

(2)-லிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின், $4kf = 0$

$$\therefore \quad f = 0,\ c = -k^2 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

மேலும் $y = mx + b$ வட்டம் (1)-க்குத் தொடு கோடெனில், வட்டம் (1)-இன் மையத்திலிருந்து $((-g, -f),\ y-mx-b = 0$ கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \quad \frac{-f-m(-g)-b}{\sqrt{1+m^2}} = \sqrt{g^2+f^2-c}$$

(அ - து) $(b + f - mg)m^2 = (1 + m^2)(g^2 + f^2 - c)$

$$\therefore \quad (b+f)^2 + m^2g^2 - 2(b+f)mg$$
$$= g^2 + f^2 - c + m^2g^2 + m^2f^2 - m^2c$$

(அ - து) $g^2+2m(b+f)g-(b+f)^2+(f^2-c)(1+m^2)=0.$

இது g-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் g-க்கு இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. அவை g_1, g_2 எனில், கொடுத்துள்ள கட்டுப்பாட்டில் இரு வட்டங்கள் உள்ளன.

$$\therefore \quad g_1g_2 = (f^2-c)(1+m^2)-(b+f)^2$$

(4)-இன்படி $f=0,\ c=-k^2$

$$\therefore \quad g_1g_2 = k^2(1+m^2)-b^2.$$

இவ்விரு வட்டங்களும் செங்குத்து வட்டங்களாதலால்,

$$2g_1g_2+2f_1f_2 = c_1+c_2$$

$$\therefore \quad 2\{k^2(1+m^2)-b^2\} = -2k^2$$

$$[\because\ f_1 = 0 = f_2;\ c_1 = -k^2 = c^2]$$

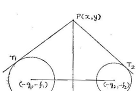
(அ - து) $4k^2+2k^2m^2 = 2b^2$

$$\therefore \quad k^2(2+m^2) = b^2.$$

5·3. சமத் தொடு அச்சு (Radical Axis) வரையறை

ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு வட்டங்களுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் நீளங்கள் சமமெனில், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி அவ் விரு வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சு எனப்படும்.

5·4. சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு



படம் 42.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

சமத் தொடு அச்சின் மீது $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும், PT_1, PT_2 முறையே வட்டங்கள் (1), (2)-க்கு வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் எனவும் கொள்வோம்.

வரையறையின்படி $PT_1 = PT_2$

(அ - து) $PT_1^2 = PT_2^2$

$$\therefore \; x_1^2 + y_1^2 + 2g_1x_1 + 2f_1y_1 + c_1 = x_1^2 + y_1^2 + 2g_2x_1 + 2f_2y_1 + c_2$$

$$\therefore \; 2x_1(g_1-g_2)+2y_1(f_1-f_2)+(c_1-c_2)=0 \quad .. (3)$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$2x(g_1-g_2) + 2y(f_1-f_2) + (c_1-c_2) = 0.$$

இஃது ஒருபடிச் சமன்பாடாதலின் சமத் தொடு அச்சு ஒரு நேர்க் கோடாகும்.

மேலும் $S_1 - S_2 \equiv 2x(g_1-g_2) + 2y(f_1-f_2) + c_1 - c_2$

எனவே, சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு,

$S_1 - S_2 = 0$ என்றும் குறிப்பிடலாம்.

5·5. 1. வட்டங்களின் மையங்கள் $(-g_1, -f_1)$, $(-g_2, -f_2)$.

எனவே, வட்டங்களின் மையப்பிணைக் கோடு (line of centres) சரிவு,

$$\frac{f_1-f_2}{g_1-g_2}$$

சமத் தொடு அச்சின் சரிவு,

$$-\frac{g_1-g_2}{f_1-f_2}.$$

எனவே, சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை -1 ஆகும்.

∴ சமத் தொடு அச்சு, வட்டங்களின் மையப்பிணைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது.

2. சமத் தொடு அச்சின் சமன்பாடு $S_1 - S_2 = 0$. எனவே, $S_1 = 0$, $S^2 = 0$ சமன்பாடுகளுடன் பொருந்தும் புள்ளிகள் $S_1 - S_2 = 0$ சமன்பாட்டுடனும் பொருந்தும். ஆகவே $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் பொதுப் புள்ளிகளின் வழி அவ் வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சு $S_1 - S_2 = 0$ செல்லும்.

என்வே, இரு வட்டங்களும் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும்போது சமத்தொடு அச்சு அவ் வட்டங்களின் பொது நாண் ஆகும். அவ் வட்டங்கள் தம்முள் தொடுமெனில், சமத்தொடு அச்சு அவ் வட்டங்களின் தொடு புள்ளியிடத்துத் தொடு கோடாகும். அவ்விரு வட்டங்களும் தம்முள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாவிடில், கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் கூறுகிறோம். அவைகள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டினும் சமத்தொடு அச்சு மெய்யானதே.

3. சமத்தொடு அச்சின் வரையறையின்படி அஃது இரு வட்டங்களும் வரையப்படும் பொதுத் தொடு கோடுகளை இரு சமக் கூறிடும்.

4. $S_1 = 0$ வட்டம், $S_2 = 0$ வட்டத்தின் பரிதியை இரு சமமாகப் பிரித்தால் அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு $S_2 = 0$ வட்டத்தின் மையம் வழிச் செல்லும்.

5·6. சமத்தொடு வரை மையம் (Radical Centre)

வரையறை: மூன்று வட்டங்களை இரண்டிரண்டாக எடுத்துக் கொண்டால், அவைகளின் சமத்தொடு அச்சுக்கள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும். அப் புள்ளி சமத்தொடு வரைமையம் எனப்படும்.

வட்டங்களின் சமன்பாடுகள்,

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ எனக் கொள்வோம்.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$S_1 - S_2 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$S_2 = 0$, $S_3 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$S_2 - S_3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1)-ஐயும் (2)-யும் கூட்டினால்,

$$S_1 - S_3 = 0 \text{ ஆகும்.} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(அ - து) சமத்தொடு அச்சுக்கள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு (3) ஆகும்,

ஆனால் சமன்பாடு (3), $S_1 = 0$, $S_3 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சாகும்.

எனவே, சமத்தொடு அச்சுக்கள் மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

5·7. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S_1 + \lambda S_2 = 0$, $(\lambda \neq -1)$

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$S_2 \equiv x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0,$$

எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad S_1 + \lambda S_2 \equiv x^2(1+\lambda) + y^2(1+\lambda) + 2x(g_1 + \lambda g_2) + 2y(f_1 + \lambda f_2) + (c_1 + \lambda c_2) = 0$$

$$(\text{அ - து}) \quad x^2 + y^2 + \frac{2(g_1 + \lambda g_2)}{1 + \lambda}x + \frac{2(f_1 + \lambda f^2)}{1 + \lambda}y + \frac{c_1 + \lambda c_2}{1 + \lambda} = 0.$$

இச் சமன்பாட்டில்,

x^2-இன் கெழு $= y^2$-இன் கெழு

xy-இன் கெழு $= 0$

எனவே, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களில் பொருந்தும் புள்ளிகள் $S_1 + \lambda S_2 = 0$ வட்டத்திலும் பொருந்தும். $\therefore$ $S_1 + \lambda S_2 = 0$ வட்டம் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். கூடுதலாகக் கொடுக்கப்படும் கட்டுப்பாட்டிலிருந்து λ-வின் மதிப்பை அறியலாம்.

$\lambda = -1$ எனில், $S_1 + S_2 = 0$ வட்டம் $S_1 - S_2 = 0$ எனும் சமத்தொடு அச்சாகும்.

குறிப்பு : வட்டங்களின் சமன்பாடுகளில் x^2, y^2 உறுப்புக் களின் கெழுக்கள் ஒவ்வொன்றும் ஒன்றுக்குச் சமமாக இருக்கு மாறு சமன்பாடுகளை முதலில் மாற்றி எழுத வேண்டும்.

5·8. $S = 0$ வட்டமும், $L = 0$ கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டத்தின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$.

$$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

$L \equiv lx + my + n = 0$ எனில்,

$$S + \lambda L \equiv x^2 + y^2 + (2g + \lambda l)x + (2f + \lambda m)y + (c + \lambda n) = 0$$

இதில், x^2-இன் கெழு $= y^2$-இன் கெழு

xy-இன் கெழு $= 0$

எனவே, இச் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

மேலும் $S = 0$, $L = 0$ என்ற வளை வரைகளில் பொருந்தும் புள்ளிகள் $S + \lambda L = 0$ வட்டத்திலும் பொருந்தும்.

எனவே, $S = 0$ வட்டமும், $L = 0$ கோடும் வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் வழி $S + \lambda L = 0$ வட்டம் செல்லும்.

5·9. ஒரு வட்டம் வேறு இரு வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுமெனில் அவ் வட்டத்தின் மையம் மற்ற இரு வட்டங் களின் சமத்தொடு அச்சின் மீதமையும்.

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

வட்டம்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுகின்றது எனக்கொள்வோம்.

$$\therefore \quad 2gg_1 + 2ff_1 = c + c_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$2gg_2 + 2ff_2 = c + c_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

(4)-இலிருந்து (5)-ஐக் கழிக்க,

$$2g(g_1-g_2)+2f(f_1-f_2)=c_1-c_2$$

(அ-து) $2(-g)(g_1-g_2)+2(-f)(f_1-f_2)+(c_1-c_2)=0$

எனவே, (1)-இன் மையம் $(-g, -f)$.

$$2x(g_1-g_2)+2y(f_1-f_2)+(c_1-c_2)=0 \quad \ldots \quad (6)$$

கோட்டின்மீது அமையும்.

சமன்பாடு (6), வட்டங்கள் (2), (3)-இன் சமத்தொடு அச்சு ஆதலின், வட்டம் (1)-இன் மையம் வட்டங்கள் (2), (3)-இன் சமத்தொடு அச்சின்மீது அமையும்.

மாதிரி 3 : $x^2+y^2+2x+4y-7=0$, $x^2+y^2-6x+2y-5=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுக் காண்க. அது மையம் பிணைக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ளது என நிறுவுக.

$$S_1 \equiv x^2+y^2+2x+4y-7=0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv x^2+y^2+6x+2y-5=0 \quad \ldots \quad (2)$$

$S_1=0$, $S_2=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$S_1-S_2=0.$$

(அ-து) $8x+2y-2=0$

(அ-து) $4x+y-1=0$.

$S_1=0$ வட்டத்தின் மையம் $(-1, -2)$.

$S_2=0$ வட்டத்தின் மையம் $(3, -1)$.

$\therefore$ மையப்பிணைக் கோட்டின் சரிவு. $\dfrac{-2+1}{-1-3}=\dfrac{1}{4}$.

சமத்தொடு அச்சு $4x+y-1=0$-த்தின் சரிவு $=-4$.

சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை $\left(\frac{1}{4}\right)(-4)=-1$.

எனவே, மையப் பிணைக்கோடும் சமத்தொடு அச்சும் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டும்.

மாதிரி 4 : $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ வட்டங்களின் பரிதிகளை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் வட்டத்தின் மையத்தின் இயங்கு வழிக் காண்க.

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (1)

எனக் கொள்வோம்.

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \ldots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

வட்டம் (1) வட்டம் (2)-இன் பரிதியை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

எனவே, அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு வட்டம் (2)-இன் மையம் (0, 0) வழிச் செல்லும்.

வட்டம் (1), வட்டம் (2)-இன் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c) - (x^2 + y^2 - 4) = 0$$

(அ - து) $2gx + 2fy + c + 4 = 0$

இது (0, 0) வழிச் செல்வதால் $c = -4$.

மேலும், வட்டம் (1) வட்டம் (3)-இன் பரிதியை இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது. எனவே, அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு, வட்டம் (3)-இன் மையம் (1, −3) வழிச் செல்லும்.

வட்டங்கள் (1), (3)-இன் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2+y^2+2gx+2fy+c)-(x^2+y^2-2x+6y+1) = 0$$

(அ - து) $2(g+1)x+2(f-3)y+(c-1) = 0$

இது (1, −3) வழிச் செல்லின்,

$$2(g+1) + 2(f-3)(-3) + c - 1 = 0$$

(அ - து) $2g - 6f + 15 = 0 \quad (\because c = -4)$

(அ - து) $-2(-g) + 6(-f) + 15 = 0$

எனவே, வட்டம் (1)-இன் மையத்தின் $(-g, -f)$ இயங்கு வழி

$$-2x + 6y + 15 = 0$$

(அ-து) $2x - 6y - 15 = 0$.

மாதிரி 5 : $S_1=0$, $S_2=0$ வட்டங்களின் ஆரங்கள் முறையே a_1, a_2 எனில், $\frac{S_1}{a_1} \pm \frac{S_2}{a_2}=0$ வட்டங்கள் செங்குத்து வட்டங்கள் என நிறுவுக.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் மையங்கள் முறையே $(-c, 0)$, $(c, 0)$ எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad S_1 \equiv (x+c)^2 + y^2 - a_1^2 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv (x-c)^2 + y^2 - a_2^2 = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$\frac{S_1}{a_1} + \frac{S_2}{a_2} = 0, \quad \frac{S_1}{a_1} - \frac{S_2}{a_2} = 0$$

வட்டங்களைச் சுருக்கின், $S_1a_2 + S_2a_1 = 0$, $S_1a_2 - S_2a_1 = 0$ ஆகும்.

$$S_1a_2 + S_2a_1 \equiv (x^2 + y^2 + 2cx + c^2 - a_1^2)a_2 + (x^2 + y^2 - 2cx + c^2 - a_2^2)a_1 = 0.$$

(அ-து) $x^2(a_1 + a_2) + y^2(a_1 + a_2) + 2x(ca_2 - ca_1) + c^2(a_1 + a_2) - a_1a_2(a_1 + a_2) = 0.$

(அ-து) $(x^2 + y^2)(a_1 + a_2) + 2cx(a_2 - a_1) + (c^2 - ca_2)(a_1 + a_2) = 0.$

(அ-து) $x^2 + y^2 + 2c\,\frac{(a_2 - a_1)}{a_1 + a_2}\,x + c^2 - ca_2 = 0.$

$$\therefore \quad S_1a_2 + S_2a_1 \equiv x^2 + y^2 + \frac{2c(a_2 - a_1)}{a_1 + a_2}\,x + (c^2 - ca_2) = 0 \qquad \ldots \quad (3)$$

இவ்வாறே, $S_1a_2 - S_2a_1 \equiv x^2 + y^2 + \frac{2c(a_2 + a_1)}{a_2 - a_1}\,x + (c^2 + ca_2) = 0 \qquad \ldots \quad (4)$

வட்டங்கள் (3), (4) செங்குத்து வட்டங்களெனில்,

$$\frac{2c(a_2 - a_1)}{a_2 + a_1} \cdot \frac{c(a_2 + a_1)}{a_2 - a_1} = c^2 - ca_2 + c^2 + ca_2$$

(அ-து) $2c^2 = 2c^2$

இது மெய்யாதலின் வட்டங்கள்,

$$\frac{S_1}{a_1} \pm \frac{S_2}{a_2} = 0$$

செங்குத்து வட்டங்களாகும்.

மாதிரி 6 : $x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0$, $lx+my+m=0$ வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் $x^2 + y^2 + g_1x + f_1y + c_1 = 0$, $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ வெட்டும் புள்ளிகள் இரண்டும் ஒரே வட்டத்தின் மீதமையுமெனின்,

$$\begin{vmatrix} g-g_1 & f-f_1 & c-c_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ என நிறுவுக.}$$

$$S \equiv x^2 + y^2 + gx + fy + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$L \equiv lx + my + n = 0 \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$S_1 \equiv x^2 + y^2 + g_1x + f_1y + c_1 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

$$L_1 \equiv l_1x + m_1y + n_1 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள் (3), (4) வெட்டும் புள்ளிகள் அமைந்துள்ள வட்டம் $S_2 = 0$ ... ... (5)
எனக் கொள்வோம்.

$S = 0$, $S_1 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு, $S - S_1 = 0$

$$(\text{அ-து}) \quad 2x\left[\frac{g}{2} - \frac{g_1}{2}\right] + 2y\left[\frac{f}{2} - \frac{f_1}{2}\right] + c - c_1 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad x(g-g_1) + y(f-f_1) + (c-c_1) = 0 \quad \ldots \quad (6)$$

$S=0$, $S_2=0$ வெட்டும் புள்ளிகள் $lx+my+n=0$ கோட்டின் மீதமையும். எனவே அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு,

$$lx + my + n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

ஆகும்.

$S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்ற வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளி $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோட்டின் மீதமையும். எனவே, அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ ... ... (4)

$\therefore$ சமத்தொடு அச்சுக்கள் (2), (4), (6) மூன்றும் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும்.

இச் சமன்பாடுகளிலிருந்து x, y-ஐ நீக்கின்,

$$\begin{vmatrix} g-g_1 & f-f_1 & c-c_1 \\ l & m & n \\ l_1 & m_1 & n_1 \end{vmatrix} = 0$$

மாதிரி 7 : $x^2+y^2+2x+3y-7=0$, $x^2+y^2-2x-y+1=0$ வட்டங்கள் சமத்தொடு அச்சுக் காண்க. அவைகளின் பொது நாணின் நீளம் காண்க.

சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2=y^2+2x+3y-7)-(x^2+y^2-2x-y+1)=0$$

(அ - து) $4x+4y-8=0$

(அ - து) $x+y-2=0$.

இரு வட்டங்களும் வெட்டும் புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனின்,

நாணின் நீளம் $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

சமத்தொடு அச்சு பொது நாண் ஆதலின்,

$$x^2+y^2-2x-y+1=0, \; x+y-2=0$$

சமன்பாடுகளிலிருந்து வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணலாம்.

$x+y-2=0$-இலிருந்து $x=2-y$.

இதை $x^2+y^2-2x-y+1=0$-இல் பிரதியிடின்

$$(2-y)^2+y^2-2(2-y)-y+1=0$$

(அ - து) $2(y^2-3y+1)=0$

$$\therefore \; y_1+y_2=\frac{3}{2}, \; y_1y_2=\frac{1}{2}.$$

எனவே, $(y_1-y_2)^2=(y_1+y_2)^2-4y_1y_2=\frac{9}{4}-2=\frac{1}{4}$.

$$[x_1-x_2]^2 = \{(2-y_1)-(2-y_2)\}^2 = +(y_1-y_2)^2$$

$$= +\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

$\therefore$ நாணின் நீளம் $= \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$

பிறிதொரு முறை

சமத்தொடு அச்சு $x+y-2=0$. இந்தக் கோடு வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம்.

$$x^2+y^2+2x+3y-7+\lambda(x+y-2)=0$$

(அ - து) $x^2+y^2+(2+\lambda)x+(3+\lambda)y-7-2\lambda=0.$

இதன் மையம் $\left(-\frac{\lambda+2}{2},\ -\frac{\lambda+3}{2}\right)$

இப்புள்ளி $x+y-2=0$-இல் இருப்பின் இவ்வட்டத்தின் விட்டம் இவ்வட்டங்களின் பொது நாணாகும்.

$$-\frac{\lambda+2}{2}-\frac{\lambda+3}{2}-2=0$$

$$\therefore\quad \lambda=-\frac{9}{2}$$

$\therefore$ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+2x+3y-7-\frac{9}{2}(x+y-2)=0.$$

(அ - து) $2x^2+2y^2-5x-3y+4=0$

இவ்வட்டத்தின் விட்டம் $= \frac{\sqrt{2}}{2}.$

பயிற்சி 5.1.

1. $x^2+y^2+2x-8y+8=0$, $x^2+y^2+10x-2y+22=0$ வட்டங்கள் தம்முள் தொடும் புள்ளியைக் காண்க.

2. $x^2+y^2-2x+3y-7=0$, $x^2+y^2+5x-5y+9=0$, $x^2+y^2+7x-9y+29=0$ வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

3. $x^2+y^2-8y+12=0,\quad x^2+y^2-4x-6y-3=0$ வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் ஒரு வட்டம் ஆதி வழிச் செல்லுமெனில் அதன் சமன்பாடு காண்க.

4. $x+y=4$ கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட ஒரு வட்டம் ஆதிவழிச் செல்கிறது. இவ்வட்டம் $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ வட்டத்தைச் செங்குத்தாக வெட்டுமெனில், அதன் சமன்பாடு காண்க.

5. $x^2+y^2+4x+7=0,\quad 2x^2+2y^2+3x+5y+9=0,$ $x^2+y^2+y=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு வரை மையம் காண்க.

6. கொடுத்துள்ள இரு வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

7. $y=7$ கோட்டின் மீது மையமுடைய வட்டங்கள் $(3,0)$ புள்ளி வழிச் செல்லின் அவ்வட்டங்களின் சமன்பாட்டின் பொது வடிவம் என்ன?

8. $x^2+y^2-4=0,\ x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு யாது?

9. $x^2+y^2+2k_1x+c=0,\quad x^2+y^2+2k_2x-c=0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம்.

$$2\sqrt{\frac{(k_1^2-c)\,(k_2^2+c)}{k_1^2+k_2^2}}$$ என நிறுவுக.

10. $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2,\qquad (x-b)^2+(y-a)^2=c^2$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளத்தையும் அதன் சமன்பாட்டையும் காண்க.

11. $x^2+y^2=a^2$ வட்டத்தின் நாண் $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$ எனில், அந் நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2-a^2-2p(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)=0$$

என நிறுவுக.

12. $x^2 + y^2 - 2a_1x - 2b_1y + c_1 = 0$
$x^2 + y^2 - 2a_2x - 2b_2y + c_2 = 0$

வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y \\ c_1 & a_1 & b_1 \\ c_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவுக.

13. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

14. $S=0$ என்ற வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் A, B எனில், AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

15. $x^2 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிவழிச் செல்லும் ஒரு வட்டத்தின் ஆரம் $2\sqrt{2}$ எனில், அவ் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

16. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோடுகள் $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளெனில் $(l_1l_2 + m_1m_2)a^2 = n_1n_2$ என நிறுவுக.

17. $y - 2x = 0$, $y - 3x = 0$, $y - 5x = 4$ என்ற கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் காண்க.

18. $5x+y = 103$, $x-y = 11$, $2x-3y = 31$ கோடுகளைப் பக்கங்களாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் சுற்று வட்டம் காண்க.

19. $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களுக்கு P புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடு கோடுகளின் வர்க்கங்களின் வித்தியாசம் $PA^2 - PB^2$. P புள்ளியிலிருந்து அவ் வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு PL.

வட்டங்களின் மையப் பிணைக்கோட்டின் நீளம் MN எனின், $PA^2-PB^2 = 2.PL.MN$ என நிறுவுக.

20. $2x^2+2y^2-3x+5y-7=0$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $9x+y-28=0$ கோட்டின் இசைப் புள்ளி காண்க.

விடைகள்

1. $\left(-\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$. 2. $x^2+y^2-16x-18y-4=0$. 3. $x^2+y^2+6x-3y=0$. 4. $x^2+y^2-4x-4y=0$. 5. $(-2, -1)$. 7. $x^2+y^2-14y-9+2g(x-3)=0$. 8. $5x^2+5y^2-8x-16y+12=0$. 10. $\frac{2hk}{\sqrt{h^2+k^2}}$, $hx-ky=0$. 13. $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0$. 15. $x^2+y^2-4x-8y+12=0$, $5x^2+5y^2+4x+8y-36=0$. 17. $3x^2+3y^2-60x+40y=0$. 18. $x^2+y^2-14x-6y-111=0$. 20. $(3, -1)$.

5·10. பொது அச்சு வட்டங்கள் — வரையறை

ஒருநிலை வட்டங்களில் (system of circles) ஒவ்வோர் இரட்டை வட்டங்களும் (every pair of circles) ஒரே கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்டிருப்பின், அவைகள் பொது அச்சு வட்டங்கள் (coaxial circles) எனப்படும்.

பொது அச்சு வட்டங்களைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்கள் $S_1=0$, $S_2=0$ எனக்கொள்வோம். இவ்வட்டங்கள் A, B புள்ளிகளில் மெய்யாகவோ, கற்பனையாகவோ தம்முள் வெட்டினால், A, B புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கோடு அவ்வட்டங்களின் பொது நாண் அல்லது சமத்தொடு அச்சு ஆகும். வரையறையின்படி எல்லா வட்டங்களுக்கும் சமத்தொடு அச்சு ஒன்றே யாதலின், எல்லா வட்டங்களும் A, B என்ற நிலைத்த புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். சமத்தொடு அச்சு AB, மையப்பிணைக் கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயிருக்குமாதலின் எல்லா வட்டங்களின் மையங்களும் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையும்.

5·11. பொது அச்சு வட்டங்களின் எளிய சமன்பாடு

பொது அச்சு வட்டங்களின் மையங்கள் ஒரே நேர்க்கோட்டில் அமையுமாதலின், மையப் பிணைக்கோட்டை x ஆயமாகவும்,

அக்கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயுள்ள பொதுச் சமத்தொடு அச்சை y ஆயமாகவும் கொள்வோம்.

பொது அச்சு வட்டங்களைச் சேர்ந்த இரு வட்டங்கள்,

$$S_1 \equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$$
$$S_2 \equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0$$

எனக் கொள்வோம்.

மையப் பிணைக்கோடு x ஆயமாதலின், மையங்களின் y ஆயத் தொலைகள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad f_1=0, \quad f_2=0.$$

எனவே, அவ்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2+y^2+2g_1x+c_1=0$$
$$x^2+y^2+2g_2x+c_2=0 \quad \text{என ஆகும்.}$$

அவைகளின் சமத்தொடு அச்சு

$$(x^2+y^2+2g_1x+c_1)-(x^2+y^2+2g_2x+c_2)=0$$

(அ - து) $2x(g_1-g_2)+(c_1-c_2)=0.$

சமத்தொடு அச்சு y ஆயமாதலின், $x=0$

$$\therefore \quad c_1-c_2=0$$

(அ-து) $c_1=c_2=c$ என்க.

எனவே, அவ்விரு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2g_1x+c=0$$
$$x^2+y^2+2g_2x+c=0 \quad \text{என்றாகும்.}$$

(அ - து) பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு

$$x^2+y^2+2gx+c=0$$

இச்சமன்பாட்டில் c மாறிலி. ஆனால் g வட்டத்திற்கு வட்டம் மாறக்கூடிய துணை அலகு. g-யின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கு அக் குழுவைச் சேர்ந்த பல்வேறு வட்டங்கள் கிடைக்கப்பெறும்.

5·12. வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள்

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்பது பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடாகும்.

இவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு y ஆயமாகும். இவை களில் இரு வட்டங்கள்

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவைகள் y ஆயத்தின் மீது (சமத்தொடு அச்சு) நிலைத்த புள்ளிகளில் வெட்டிக் கொள்கின்றன.

எனவே, சமன்பாடுகளில் $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்

$$y^2 + c = 0 \quad (\text{அ - து}) \quad y = \pm\sqrt{-c}.$$

$\therefore$ வட்டங்கள் y ஆயத்தின் மீது வெட்டிக் கொள்ளும் புள்ளிகள் $A(0, \sqrt{-c})$, $B(0, -\sqrt{-c})$.

வகை (i) $c = 0$ எனில் A, B இரு புள்ளிகளும் பொருந்தும் புள்ளிகள். AB என்ற பொது நாண் (சமத்தொடு அச்சு அல்லது y ஆயம்) அவ் வட்டங்களுக்கு அப் புள்ளி $(0, 0)$-இடத்துத் தொடு கோடாகும். வட்டங்கள் ஒன்றையொன்று உட்புறம் அல்லது வெளிப்புறம் தொடும்.

வட்ட மையங்கள் $(-g_1, 0)$, $(-g_2, 0)$ ஆதலின், $g_1 < 0$, $g_2 < 0$ அல்லது $g_1 > 0$, $g_2 > 0$ எனில் வட்டங்கள் சமத்தொடு அச்சிற்கு ஒரே பக்கத்திலிருக்கும். அதாவது அவ் வட்டங்கள் தம்முள் உட்புறம் தொடும்.

$g_1 > 0$, $g_2 < 0$ அல்லது $g_1 < 0$, $g_2 > 0$ எனில், வட்டங்கள் சமத்தொடு அச்சிற்கு இரு பக்கங்களிலும் இருக்கும். அதாவது வட்டங்கள் தம்முள் வெளிப்புறம் தொடும்.

எனவே, $c = 0$, $g_1g_2 > 0$ எனில் வட்டங்கள் உள்ளேயும், $c = 0$, $g_1g_2 < 0$ எனில் வட்டங்கள் வெளியேயும் தொடும். தொடு புள்ளியிடத்துப் பொதுத் தொடு கோடு அவைகளின் சமத் தொடு அச்சு ஆகும்.

வகை (ii) $c < 0$ எனில், $\sqrt{-c}$ மெய் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். எனவே, வட்டங்கள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும். $g_1g_2 > 0$ எனில் சமத்தொடு அச்சிற்கு ஒரே பக்கத்திலும், $g_1g_2 < 0$ எனில் எதிர் பக்கங்களிலும் இவ் வட்டங்கள் இருக்கும்.

வகை (iii) $c > 0$ எனில், $\sqrt{-c}$ கற்பனை மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். அவ்வட்டங்கள் மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டா.

5·13, எல்லைப் புள்ளிகள் (Limiting Points).

வரையறை : பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களில் பூச்சியம் ஆரம் கொண்ட வட்டங்கள் அந்நிலை வட்டங்களின் **எல்லைப் புள்ளிகள்** எனப்படும்.

5·14. எல்லைப் புள்ளிகள் காணல்

பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0,$$

எனக் கொள்வோம்.

இவ்வட்டத்தின் ஆரம் $\sqrt{g^2 - c}$ ஆரம் பூச்சியமெனில், $g^2 - c = 0$ (அ-து) $g = \pm\sqrt{c}$. எனவே, $g = \sqrt{c}$, $g = -\sqrt{c}$ மதிப்புகளுக்கு,

$$x^2 + y^2 + 2\sqrt{c}\,x + c = 0$$

$$x^2 + y^2 - 2\sqrt{c}\,x + c = 0$$

(அ-து) $(x + \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$,

$(x - \sqrt{c})^2 + y^2 = 0$ என்ற இரு வட்டங்கள் கிடைக்கும்.

இவைகளின் ஆரங்கள் பூச்சியமாதலின் பொது அச்சு வட்டங்களில் உள்ள எல்லைப்புள்ளிகள் இரண்டு ஆகும். அவை $(\sqrt{c}, 0)$ $(-\sqrt{c}, 0)$ ஆகும். இவைகள் மையப்பிணைக் கோட்டில் சமத்தொடு அச்சுக்கு இரு பக்கத்திலும் சமதூரத்தில் இருக்கும். எல்லைப் புள்ளிகள், புள்ளி வட்டங்கள் (point circles) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

$c > 0$ எனில் இப்புள்ளிகள் மெய்யானவை.

$c < 0$ எனில் இவைகள் கற்பனையானவை.

கிளை : எல்லைப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம், பொது அச்சு வட்டங்கள் அனைத்தையும் செங்குத்தாய் வெட்டும்.

5·15. பொது அச்சு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் ஒவ்வொரு வட்டத்தையும் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகளாகும்.

பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இதன் எல்லைப் புள்ளிகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$.

(1)-ஐச் சார்ந்த $(\sqrt{c}, 0)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$x\sqrt{c} + y(0) + g(x + \sqrt{c}) + c = 0$$

(அ - து) $(g + \sqrt{c})x + (g + \sqrt{c})\sqrt{c} = 0$

(அ - து) $(g + \sqrt{c})(x + \sqrt{c}) = 0$.

எனவே, இசைக் கோடு $(-\sqrt{c}, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்

5·16. பொது அச்சு ஒருநிலைக் குத்து வட்டங்கள் (Orthogonal System of Coaxial Circles)

பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + 2gx + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

வட்டங்களின் மையப் பிணைக்கோடு, சமத்தொடு அச்சு ஆகியவை முறையே x, y ஆயங்கள் என ஏற்கனவே நாம் கண்டோம். இவ்வமைப்பை அமைப்பு C எனக் குறிப்பிடுவோம்.

அமைப்பு C-யில் உள்ள ஒவ்வொரு வட்டத்தையும்,

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + k = 0 \quad \dots \quad (2)$$

வட்டம் செங்கோணத்தில் வெட்டும் எனக் கொள்வோம்.

அமைப்பு C-யின் இரு வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_2x + c = 0 \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

எனில், வட்டங்கள் (3), (4)-ஐயும் வட்டம் (2) செங்கோணத்தில் வெட்டும்.

$$\therefore \quad 2gg_1 = k + c$$
$$2gg_2 = k + c.$$
$$\therefore \; g(g_1 - g_2) = 0$$
$$g_1 - g_2 \neq 0. \qquad \therefore \; g = 0.$$

மேலும் $2gg_1 = k + c$ சமன்பாட்டில் $g = 0$ எனப் பிரதியிடின், $k + c = 0$ (அ-து) $k = -c$ என்றுகும்.

எனவே, வட்டம் (2)

$$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

என்றுகும்.

இச் சமன்பாட்டில் f ஒரு மாறி, c ஒரு மாறிலி.

f-இன் மதிப்பு எதுவாயினும், $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$,

$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் வெட்டும். f-இன் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்குச் சமன்பாடு $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ பல்வேறு வட்டங்களைக் குறிக்கும். எனவே சமன்பாடு (5) ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

மேலும் $f = f_1$, $f = f_2$ என்ற மதிப்புக்களுக்குச் சமன்பாடு (5)

$$x^2 + y^2 + 2f_1 y - c = 0$$
$$x^2 + y^2 + 2f_2 y - c = 0$$

என்ற வட்டங்களை அளிக்கும்.

இவைகளின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2 + y^2 + 2f_1 y - c) - (x^2 + y^2 + 2f_2 y - c) = 0$$

(அ-து) $(f_1 - f_2)y = 0$

$$f_1 - f_2 \neq 0. \qquad \therefore \; y = 0.$$

எனவே, x ஆயம் இவைகளின் சமத்தொடு அச்சு.

f_1, f_2 என்பவை f-இன் யாதேனும் இரு மதிப்புக்களாகும். எனவே, f-இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் (அ - து) இந் நிலை வட்டங்கள் யாவற்றிற்கும் சமத்தொடு அச்சு x ஆயமேயாகும்.

$\therefore\ x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ என்ற சமன்பாடு பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும். இவ் வமைப்பை அமைப்பு C' எனக் குறிப்பிடுவோம். அமைப்பு C'-இல் உள்ள ஒவ்வொரு வட்டமும் அமைப்பு C-யில் உள்ள அனைத்து வட்டங்களையும் செங்கோணத்தில் வெட்டும். எனவே, அமைப்பு C' பொது அச்சுச் செங்குத்து நிலை வட்டங்கள் (orthogonal system of coaxial circles) இவ்வமைப்பிலுள்ள வட்டங்களின் மையங்களின் x ஆயத் தொலைகள் பூச்சியமாகும். எனவே, அனைத்து வட்டங்களின் மையங்களும் y ஆயத்தின் மீதமைந்திருக்கும். இவ்வமைப்பில் மையப் பிணைக்கோடு y ஆயம், சமத்தொடு அச்சு x ஆயம் ஆகும்.

5·17. $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$-த்தின் எல்லைப்புள்ளிகள்

$$x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$$

பொது அச்சு ஒருநிலை குத்து வட்டங்கள் எனக் கொள்வோம்.

இதன் ஆரம். $\sqrt{f^2 + c}$

இது பூச்சியமெனில், $f^2 + c = 0$ (அ-து) $f = \pm\sqrt{-c}$.

எனவே, எல்லைப்புள்ளிகள், $(0, \sqrt{-c})$, $(0, -\sqrt{-c})$.

5·18. அமைப்பு C, $x^2 + y^2 + 2gx + c = 0$

அமைப்பு C', $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$

எனக்கொள்வோம்.

அமைப்பு C-யில் மையப் பிணைக்கோடும், பொது சமத்தொடு அச்சும் முறையே x. y ஆயங்கள் என நாம் கண்டோம். மேலும், அமைப்பு C'-இல் இவைகள் முறையே y, x ஆயங்கள் எனவும் கண்டோம்.

எனவே, ஓர் அமைப்பின் சமத்தொடு அச்சும், மையப் பிணைக்கோடும் முறையே இதன் செங்குத்து அமைப்பின் மையப் பிணைக்கோடும் பொது சமத்தொடு அச்சுமாகும்.

5·19. ஓர் அமைப்பின் எல்லைப்புள்ளிகள் அதன் செங்குத்து அமைப்பின் வெட்டும் புள்ளிகளாகும்.

அமைப்பு C'-இல் உள்ள யாதேனும் இரு வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2f_1y - c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2f_2y - c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக்கொள்வோம்.

இவைகள் சமத்தொடு அச்சில் (x ஆயத்தில்) தம்முள் வெட்டுகின்றன. இச் சமன்பாடுகளில் $y = 0$ எனப்பிரதியிடின் $x = \pm\sqrt{c}$ என்றாகும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளிகள் A', B' எனின், இவைகளின் ஆயத்தொலைகள் $A'(\sqrt{c}, 0)$, $B'(-\sqrt{c}, 0)$. அமைப்பு C'-இல் உள்ள அனைத்து வட்டங்களும் இப் புள்ளிகள் வழிச் செல்கின்றன. ஆனால், இப் புள்ளிகள் அமைப்பு C-யின் எல்லைப் புள்ளிகள் எனப் பத்தி 5·14-இல் நாம் கண்டோம்.

5·20. ஓர் அமைப்பு வட்டங்கள் மெய்யான புள்ளிகளில் தம்முள் வெட்டினால் அதன் செங்குத்து அமைப்பு வட்டங்கள் கற்பனைப் புள்ளிகளில் தம்முள் வெட்டும்.

அமைப்பு C'-இல் உள்ள வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள் $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$, $c < 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் மெய்யானவையாகவும், $c < 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் கற்பனையானவையாகவும் இருக்கும். ஆனால், அமைப்பு C-யில், $c > 0$ எனில் வெட்டும் புள்ளிகள் கற்பனையானவையாகவும், $c < 0$ எனில் மெய்யானவையாகவும் இருக்கும் எனப் பத்தி 5·12-வகை (ii), (iii)-இல் கண்டோம்.

மேலும், C-யின் வட்ட மையம் $(-g, 0)$. $(-g, 0)$ புள்ளியிலிருந்து $x^2 + y^2 + 2fy - c = 0$ என்ற அமைப்பு C'-இன் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம், $\sqrt{g^2 - c}$. இஃது அமைப்பு C-யிலுள்ள வட்டத்தின் ஆரமாகும். எனவே, ஓர் அமைப்பின் வட்டங்களில் யாதேனும் ஒன்றிலிருந்து அதன் செங்குத்து அமைப்பின் வட்டங்களில் யாதேனும் ஒன்றிற்கு வரையப்படும் தொடுகோட்டின் நீளம் முதல் அமைப்பின் வட்ட ஆரத்திற்குச் சமமாகும்.

5·21. $S_1=0$, $S_2=0$ இரு வட்டங்களெனில் இவை சேர்ந்தபோது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களின் சமன்பாடு, $S_1+\lambda S_2=0\ (\lambda\neq -1)$

$S_1+\lambda S_2=0$ சமன்பாடு λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $(\lambda\neq -1)$, $S_1=0$, $S_2=0$ வட்டடங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டங்களை அளிக்கும் எனப் பத்தி 5·7-இல் கண்டோம். (அ-து) $S_1+\lambda S_2=0$ என்பது $S_1=0$, $S_2=0$ வட்டங்கள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

$S_1+\lambda S_2=0$ குறிக்கும் ஒருநிலை வட்டங்களில் யாதேனும் இரண்டு $S_1+\lambda_1 S_2=0$, $S_1+\lambda_2 S_2=0$ எனக் கொள்வோம்.

$$S_1\equiv x^2+y^2+2g_1x+2f_1y+c_1=0$$

$$S_2\equiv x^2+y^2+2g_2x+2f_2y+c_2=0 \quad \text{எனில்,}$$

$$S_1+\lambda_1S_2\equiv x^2(1+\lambda_1)+y^2(1+\lambda_1)+2x(g_1+\lambda_1g_2)$$
$$+2y(f_1+\lambda_1f_2)+(c_1+\lambda_1c_2)=0$$

(அ-து) $$x^2+y^2+\frac{2(g_1+\lambda_1g_2)}{1+\lambda_1}x+\frac{2(f_1+\lambda_1f_2)}{1+\lambda_1}y$$
$$+\frac{c_1+\lambda_1c_2}{1+\lambda_1}=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இவ்வாறே, $$x^2+y^2+\frac{2(g_1+\lambda_2g_2)}{1+\lambda_2}x+\frac{2(f_1+\lambda_2f_2)}{1+\lambda_2}y$$
$$+\frac{c_1+\lambda_2c_2}{1+\lambda_2}=0. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(1)-(2)=0.$$

(அ-து) $$\frac{S_1+\lambda_1S_2}{1+\lambda_1}-\frac{S_1+\lambda_2S_2}{1+\lambda_2}=0.$$

(அ-து) $$(1+\lambda_2)(S_1+\lambda_1S_2)-(1+\lambda_1)(S_1+\lambda_2S_2)=0.$$

$$\therefore\quad (\lambda_1-\lambda_2)(S_1-S_2)=0$$

$$\lambda_1-\lambda_2\neq 0 \quad \therefore\ S_1-S_2=0 \quad \ldots \quad (3)$$

ஆனால், சமன்பாடு (8), $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ வட்டங்களின் சமத் தொடு அச்சு.

எனவே, $S_1 + \lambda S_2 = 0$ குறிக்கும் ஒருநிலை வட்டங்களில் ஒவ்வோர் இரட்டை வட்டங்களும் ஒரே கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்டிருக்கும்,

$\therefore$ $S_1 + \lambda S_2 = 0$ பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

5·22. $L = 0$ கோடும், $S = 0$ வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களின் சமன்பாடு $S + \lambda L = 0$.

$S + \lambda L = 0$ சமன்பாடு λ-வின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் $S = 0$, $L = 0$ என்ற வட்டமும் கோடும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு நிலை வட்டங்களைக் குறிக்குமென நாம் பத்தி 5·8-இல் கண்டோம்.

$\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$ என்ற இரு மதிப்புகளுக்கு $S + \lambda L = 0$ ஒருநிலை வட்டங்களின் இரு வட்டங்கள்,

$$S + \lambda_1 L = 0$$
$$S + \lambda_2 L = 0$$

கிடைக்கப் பெறும்.

இவைகளின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(S + \lambda_1 L) - (S + \lambda_2 L) = 0$$

(அ - து) $\quad (\lambda_1 - \lambda_2)L = 0.$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0 \qquad \therefore \; L = 0.$$

λ_1, λ_2 மதிப்புக்கள் λ-வின் யாதேனும் இரு மதிப்புக்கள் ஆதலின் $S + \lambda L = 0$ வட்டங்களின் பொது சமத் தொடு அச்சு $L = 0$ என்ற கோடாகும்.

எனவே, $S + \lambda L = 0$ எனும் சமன்பாடு $L = 0$ கோட்டைச் சமத்தொடு அச்சாகக் கொண்ட பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும்.

மாதிரி 7 : $x^2+y^2+2x-6y=0$, $2x^2+2y^2-10y+5=0$ வட்டங்கள் சேர்ந்த பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகளையும், பொதுச் சமத்தொடு அச்சையும் காண்க.

$$x^2+y^2+2x-6y=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$2x^2+2y^2-10y+5=0$$

$$(\text{அ - து}) \quad x^2+y^2-5y+\frac{5}{2}=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) குறிக்கும் வட்டங்கள் சேர்ந்த பொது அச்சு வட்டங்கள்,

$$(x^2+y^2+2x-6y)+\lambda\left(x^2+y^2-5y+\frac{5}{2}\right)=0$$

$$(\text{அ - து}) \quad x^2(1+\lambda)+y^2(1+\lambda)+2x-y(6+5\lambda)+\frac{5\lambda}{2}=0$$

$$(\text{அ - து}) \quad x^2+y^2+\frac{2}{1+\lambda}x-\frac{(6+5\lambda)}{1+\lambda}y+\frac{5\lambda}{2(1+\lambda)}=0.$$

$$\text{இதன் ஆரம்}=\sqrt{\left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^2+\left(\frac{6+5\lambda}{2(1+\lambda)}\right)^2-\frac{5\lambda}{2(1+\lambda)}}$$

எல்லைப் புள்ளிகள் பூச்சியம், ஆரம் கொண்ட வட்டங்களாகும்.

$$\therefore \quad \frac{1}{(1+\lambda)^2}+\frac{(6+5\lambda)^2}{4(1+\lambda)^2}-\frac{5\lambda}{2(1+\lambda)}=0.$$

$$(\text{அ-து}) \quad 4+(6+5\lambda)^2-10\lambda(1+\lambda)=0.$$

$$\therefore \quad 3\lambda^2+10\lambda+8=0.$$

$$(\text{அ-து}) \quad (\lambda+2)(3\lambda+4)=0.$$

எனவே, $\lambda=-2, \quad \lambda=-\frac{4}{3}.$

$\therefore$ எல்லைப் புள்ளிகள்,

$$\left[-\frac{1}{1+\lambda},\ \frac{6+5\lambda}{2(1+\lambda)}\right],\quad \lambda=-2,\ \lambda=-\frac{4}{3}.$$

(அ-து) (1, 2), (3, 1).

பிறிதொரு முறை

(1), (2) வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2+y^2+2x-6y)-\left(x^2+y^2-5y+\frac{5}{2}\right)=0$$

(அ-து) $2x-y-\frac{5}{2}=0.$

பொது அச்சு வட்டங்கள்,

$$x^2+y^2+2x-6y+\lambda\left(2x-y-\frac{5}{2}\right)=0.$$

(அ-து) $x^2+y^2+2x(1+\lambda)-y(6+\lambda)-\frac{5}{2}\lambda=0.$

எல்லைப் புள்ளிகள் பூச்சியம் ஆரம் கொண்ட வட்டங்கள்.

$$\therefore\ (1+\lambda)^2+\frac{(6+\lambda)^2}{4}+\frac{5}{2}\lambda=0$$

(அ - து) $4(1+\lambda)^2+(6+\lambda)^2+10\lambda=0$

$\therefore$ $5\lambda^2+20\lambda+40=0$

(அ - து) $\lambda^2+6\lambda+8=0$

$\therefore$ $(\lambda+2)(\lambda+4)=0$

எனவே, $\lambda=-2,\ \lambda=-4$

எல்லைப் புள்ளிகள்,

$$\left[-(1+\lambda),\ \frac{6+\lambda}{2}\right],\quad \lambda=-2,\ \lambda=-4.$$

(அ - து) (1, 2), (3, 1).

மாதிரி 8 : $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$, $x^2+y^2+\lambda_1 x+k=0$ வட்டங்களின் பொது நாண் ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

$$S_1 \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_2 \equiv x^2+y^2+\lambda_1 x+k=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு, $S_1-S_2=0$

(அ - து) $(x^2+y^2+2gx+2fy+c)-(x^2+y^2+\lambda_1 x+k)=0$

(அ - து) $x(2g-\lambda_1)+2fy+(c-k)=0$

(அ - து) $(2gx+2fy+c-k)-\lambda_1 x=0.$

$\therefore$ $S_1=0$, $S_2=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு.

$2gx+2fy+c-k=0$, $x=0$ என்ற கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும். λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் சமத்தொடு அச்சு அப் புள்ளி வழிச் செல்லுமாதலின், அப் புள்ளி ஒரு நிலைத்த புள்ளியாகும்.

மாதிரி 9 : பொது அச்சு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகளில் ஒன்று ஆதி. அதைச் சேர்ந்த வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ எனில், மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க. பொது அச்சு வட்டங்களின் பொது அச்சுச் செங்குத்து வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$(x^2+y_2)(g+\mu f)+c(x+\mu y)=0$ என நிறுவுக.

ஓர் எல்லைப்புள்ளி ஆதி $(0,0)$ ஆதலின், அப் புள்ளி வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$S \equiv x^2+y^2=0.$$

மற்றொரு வட்டம், $S_1 \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0.$

எனவே, பொது அச்சு வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$S+\lambda S_1=0.$$

(அ-து) $(x^2+y^2)+\lambda(x^2+y^2+2gx+2fy+c)=0.$

(அ-து) $x^2(1+\lambda)+y^2(1+\lambda)+2g\lambda x+2f\lambda y+c\lambda=0$

(அ-து) $x^2 + y^2 + \frac{2g\lambda}{1+\lambda}x + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}y + \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0. \quad \dots (1)$

இதன் ஆரம்,

$$\sqrt{\left(\frac{g\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{f\lambda}{1+\lambda}\right)^2 - \frac{c\lambda}{1+\lambda}}$$

இது பூச்சியமெனில்,

$$\left(\frac{g\lambda}{1+\lambda}\right)^2 + \left(\frac{f\lambda}{1+\lambda}\right)^2 - \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0$$

(அ-து) $g^2\lambda^2 + f^2\lambda^2 - c\lambda(1+\lambda) = 0$

(அ-து) $\lambda[(g^2 + f^2 - c)\lambda - c] = 0$

$$\therefore \quad \lambda = 0, \ \lambda = \frac{c}{c^2 + f^2 - c}.$$

(1)-இன் மையம்,

$$\left(\frac{-g\lambda}{1+\lambda}, \ \frac{-f\lambda}{1+\lambda}\right).$$

$\lambda = 0$ எனில், எல்லைப் புள்ளி, $(0, 0)$

$\lambda = \frac{c}{g^2+f^2-c}$ எனில், எல்லைப் புள்ளி

$$\left[\frac{-cg}{g^2+f^2}, \ \frac{-cf}{g^2+f^2}\right].$$

எனவே, மற்ற எல்லைப்புள்ளி,

$$\left[\frac{-cg}{g^2+f^2}, \ \frac{-cf}{g^2+f^2}\right].$$

பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு,

$$x^2 + y^2 + \frac{2g\lambda}{1+\lambda}x + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}y + \frac{c\lambda}{1+\lambda} = 0 \quad \dots \quad (2)$$

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad \dots \quad (3)$$

எனும் வட்டம் பொது அச்சு வட்டங்கள் (2) அனைத்தையும் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது.

$$\therefore \quad \frac{2g\lambda}{1+\lambda}g_1 + \frac{2f\lambda}{1+\lambda}f_1 = \frac{c\lambda}{1+\lambda} + c_1$$

(அ-து) $2gg_1\lambda + 2ff_1\lambda = c\lambda + c_1 + c_1\lambda$

$$\therefore \quad 2gg_1 + 2ff_1 - c = \frac{c_1(1+\lambda)}{\lambda}.$$

(அ-து) $2gg_1 + 2ff_1 - c - \dfrac{c_1(1+\lambda)}{\lambda} = 0.$

இது λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் பொருந்துமாதலின்,

$$2gg_1 + 2ff_1 - c = 0, \quad c_1 = 0.$$

$$\therefore \quad f_1 = \frac{c - 2gg_1}{2f}.$$

சமன்பாடு (3)-இல் இதைப் பிரதியிடின்,

$$x^2 + y^2 + 2g_1x + 2\left(\frac{c-2gg_1}{2f}\right)y = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து) $x^2 + y^2 + 2g_1\left[x + \dfrac{c-2gg_1}{2g_1f}y\right] = 0 \quad \ldots \quad (4)$

$$\mu = \frac{c-2gg_1}{2g_1f} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

$c - 2gg_1 = 2\mu g_1 f$ (அ-து) $c = 2gg_1 + 2\mu g_1 f$

$$\therefore \; 2g_1 = \frac{c}{g+\mu f}.$$

இம் மதிப்பை (4)-இல் பிரதியிடின்

$$x^2 + y^2 + \frac{c}{g+\mu f}[x + \mu y] = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து) $(x^2+y^2)(g+\mu f) + c(x+\mu y) = 0.$

மாதிரி 10: A என்ற புள்ளியின் இரு நிலையான வட்டங்களைச் சார்ந்த இசைக் கோடுகள் B-இல் வெட்டுகின்றன எனின், பின் வருவனவற்றை நிறுவுக.

(i) AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் இரு நிலைத்த புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

(ii) AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம், நிலை வட்டங்களைச் செங்குத்தாக வெட்டுகிறது.

(iii) நிலை வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு AB-ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

நிலை வட்டங்கள்,

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவ் வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு,

$$(x^2 + y^2 + 2\lambda_1 x + c) - (x^2 + y^2 + 2\lambda_2 x + c) = 0.$$

(அ-து) $(\lambda_1 - \lambda_2)x = 0.$

$$\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0. \quad \therefore \ x = 0.$$

A புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள், (x_1, y_1) எனில் வட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் சார்ந்த அதன் இசைக்கோடுகள்,

$$xx_1 + yy_1 + \lambda_1(x + x_1) + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$xx_1 + yy_1 + \lambda_2(x + x_1) + c = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இவைகள் வெட்டும் புள்ளி B ஆகும்.

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிக்க,

$$(\lambda_1 - \lambda_2)(x + x_1) = 0$$

$$\because \ \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0, \quad x = -x_1$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$-x_1^2 + yy_1 + c = 0 \quad \therefore \ y = \frac{x_1^2 - c}{y_1}$$

எனவே, B-யின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left(-x_1, \ \frac{x_1^2 - c}{y_1}\right).$$

(i) AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$(x-x_1)(x+x_1) + (y-y_1)\left(y - \frac{x_1^2-c}{y_1}\right)=0$$

(அ-து) $x^2-x_1^2 + y^2-y\left(\frac{x_1^2-c}{y_1}\right) - yy_1 + (x_1^2-c) = 0$

எனவே, AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்,

$$x^2 + y^2 - \left(y_1 + \frac{x_1^2-c}{y_1}\right)y - c = 0. \quad \ldots \quad (5)$$

சமன்பாடு (5)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிட,

$x^2 - c = 0$ என்றாகும்.

$\therefore \quad x = \pm\sqrt{c}.$ (c ஒரு மாறிலி).

எனவே, AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் (5) நிலைத்த புள்ளிகளான $(\sqrt{c}, 0)$, $(-\sqrt{c}, 0)$ வழிச் செல்லும்.

(ii) வட்டம் (5) வட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் செங்குத்தாக வெட்டினால்,

$$2\lambda_1(0) + 2(0)\left[y_1 + \frac{x_1^2-c}{y_1}\right] = c - c$$

(அ - து) $0 = 0$ என்றாகும்.

எனவே, வட்டம் (5) விட்டங்கள் (1), (2)-ஐச் செங்குத்தாக வெட்டும்,

(iii) வட்டங்கள் (1), (2)-இன் சமத்தொடு அச்சு $x = 0$.

AB-இன் மையப் புள்ளி $x = \dfrac{x_1 - x_1}{2} = 0.$

$$y = \frac{y_1 + \dfrac{x_1^2-c}{y_1}}{2}$$

எனவே, AB-இன் மையப் புள்ளி $x = 0$ என்ற சமத் தொடு அச்சு மீது அமைந்துள்ளது.

(அ - து) $x = 0$ (y ஆயம்) என்ற சமத்தொடு அச்சு AB-ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது.

பயிற்சி 5.2.

1. (1, 2), (3, 4) என்ற எல்லைப் புள்ளிகளைக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களில் ஒன்று ஆதி வழிச் செல்லின், அதன் சமன்பாட்டைக் காண்க.

2. $x^2 = y^2 - 6x - 6y + 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8 = 0$ வட்டங்களைக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு, எல்லைப் புள்ளிகள் காண்க.

3. λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $x^2 + y^2 + 2ax + 2by - 2\lambda(ax-by) = 0$ என்ற சமன்பாடு பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக. சமத்தொடு அச்சுக் காண்க.

4. பொது அச்சு வட்டங்களைச் சேர்ந்த மூன்று வட்டங்களுக்கு ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடு கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே t_1, t_2, t_3 ஆகும். P, Q, R அவ் வட்டங்களின் மையங்கள் எனின்,

$$QR.t_1^2 + RP.t_2^2 + PQ.t_3^2 = 0$$

என நிறுவுக.

5. ஆதியை ஓர் எல்லைப் புள்ளியாகக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களில் ஒன்று $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 26 = 0$ எனின், மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

6. $x^2 + y^2 - 2x = 0$ சேர்ந்த பொது அச்சு வட்டங்களின் ஓர் எல்லைப் புள்ளி (4, 4) எனில் மற்ற எல்லைப் புள்ளியைக் காண்க.

7. $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சுக் காண்க.

8. $x^2 + y^2 - 4 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 = 0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

9. $x^2 + y^2 + 2y - 4 = 0$, $x^2+y^2+2x+2y-10=0$ வட்டங்கள் சேர்ந்த பொது அச்சு ஒருநிலை வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை ?

10. $x^2+y^2+x-7y=0$, $x^2+y^2-3x-4y=0$ வட்டங்களின் பொது நாணின் நீளம் என்ன ?

11. $x^2+y^2-2x+6y-3=0$, $x^2+y^2+2x+4y+1=0$, $2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$ வட்டங்களின் சமத்தொடு வரைச் சந்தியைக் காண்க.

12. இரு வட்டங்களைச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக்கோடுகள் Q-வில் வெட்டுகின்றன. அவ்வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு PQ-ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கிறது என நிறுவுக.

13. கொடுக்கப்பட்டுள்ள இரு வட்டங்களும், அவைகளின் வடிவொப்ப வட்டமும் (circle of similitude) பொது அச்சு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

14. $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ வட்டங்கள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் $x+2y=5$ கோட்டைத் தொடுமெனில், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

15. $x^2+y^2+4x+3y+2=0$, $x^2+y^2+2x+3y+1=0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

16. P புள்ளியிலிருந்து $x^2+y^2-2x-4y+4=0$, $x^2+y^2+10x+12y+45=0$ வட்டங்களுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் நீளம் $3:4$ விகிதத்திலிருப்பின், P-யின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. இவ்விட்டமும் மற்ற இரு வட்டங்களும் பொது அச்சு வட்டங்கள் என நிறுவுக.

17. $(0,0)$, (a,b) புள்ளிகளை எல்லைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களின் சமன்பாடு $x^2+y^2+\lambda(2ax+2by-a^2-b^2)=0$ என நிறுவுக.

18. $(2,1)$-ஐ எல்லைப் புள்ளியாகக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களில் ஒன்று $x^2+y^2-6x-4y-3=0$ எனில், சமத்தொடு அச்சு, பிறிதோர் எல்லைப்புள்ளி காண்க.

19. இரு வட்டங்கள் மூன்றாவது வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டினால், அவ்விரு வட்டங்களின் சமத்தொடு அச்சு மூன்றாவது வட்டத்தின் மையம்வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

20. $x^2+y^2-8x-6y+4=0$, $x^2+y^2-2x-4y+3=0$ வட்டங்களைக் கொண்ட பொது அச்சு வட்டங்களின் எல்லைப் புள்ளிகள் யாவை ?

21. $x^2+y^2+2gx+c=0$ பொது அச்சு வட்டங்களைச் சார்ந்த $lx+my=1$ கோட்டின் இசைப்புள்ளிகள் $x(mx-ly)-y-mc=0$ என்ற வளைவரையின் மீது அமையும் என நிறுவுக.

22. $x^2+y^2+x+5y-2=0$, $x^2+y^2+2x+5y-4=0$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

23. $y=7$ என்ற கோட்டினை விட்டமாகவும், $(3, 0)$ புள்ளி வழியாகவும் செல்லும் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு காண்க. இவைகள் பொது அச்சு வட்டங்கள் என நிறுவிச் சமத்தொடு அச்சுக் காண்க.

24. $(x-a)^2+y^2=a^2$, $x^2+(y-b)^2=b^2$ வட்டங்களின் பொது நாணை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

25. ஒரு வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் A, B எனில், AB-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் முதல் வட்டத்தைச் செங்கோணத்தில் வெட்டும் என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $x^2+y^2-x-3y=0$. 2. $4x+2y=1$; $(-1, 1)$; $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$. 3. $ax-by=0$. 5. $(2, 3)$. 6. $\left(\frac{28}{25}, \frac{4}{25}\right)$. 7. $2x+y-2=0$. 8. $5x^2+5y^2-8x-16y+12=0$. 9. $(1, -1)$, $(5, -1)$. 10. 5. 11. $\left(\frac{5}{2}, 7\right)$. 14. $x^2+y^2-x-2y=0$. 15. $2x^2+2y^2+2x+6y+1=0$. 18. $x+y+4=0$; $(-5, -6)$. 20. $(-1, 1)$; $\left(\frac{1}{5}, \frac{8}{5}\right)$. 23. $x^2+y^2-14y-9+2g(x-3)$; $x=3$. 24. $(a^2+b^2)(x^2+y^2)=2ab(bx+ay)$.

6. பரவளைவு

(Parabola)

6·1. கூம்பு வெட்டி—வரையறை (Conic Section)

நிலைத்த புள்ளி ஒன்றிலிருந்து P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு உள்ள தூரமும், நிலையான ஒரு கோட்டிலிருந்து அப் புள்ளிக்கு (P) உள்ள தூரமும் மாறு விகிதத்திலிருப்பின், P-யின் இயங்கு வழி கூம்பு வெட்டி எனப்படும்.

மாறு விகிதத்தை மையத்தொலை விகிதம் (eccentricity) எனக் கூறுகிறோம். இதை e எனக் குறியிடுவது மரபு.

நிலைத்த புள்ளி குவியம் (focus) எனவும், நிலையான கோடு இயக்குவரை (directrix) எனவும் கூறப்படுகின்றன. குவியத்தையும், இயக்குவரையையும் முறையே S, l எனக் குறியிடுவோம்.

$e = 1$ எனில், P-யின் இயங்கு வழியான கூம்பு வளைவு பரவளைவு (parabola) எனப்படும். $e < 1$ எனில் அது நீள் வட்டம் (ellipse) எனவும், $e > 1$ எனில் அதிபரவளைவு (hyperbola) எனவும் கூறப்படும்.

6·2. பரவளைவின் சமன்பாடு

இயக்குவரை $lx + my + n = 0$ எனவும், $S(\alpha, \beta)$ புள்ளி குவியம் எனவும் கொள்வோம்.

$P(x_1, y_1)$ என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின், இயக்குவரைக்கு P-யிலிருந்து PM என்ற செங்குத்துக்கோடு வரையவும்

வரையறையின்படி,

$$\frac{SP}{PM} = e = 1$$

$$\therefore \quad SP^2 = PM^2.$$

$$\therefore \quad (x_1-\alpha)^2+(y_1-\beta)^2 = \left[\frac{lx_1+my_1+n}{\sqrt{l^2+m^2}}\right]$$

(அ - து) $(l^2+m^2)[x_1^2+y_1^2-2\alpha x_1-2\beta y_1+\alpha^2+\beta^2]$
$=[l^2x_1^2+m^2y_1^2+n^2+2lmx_1y_1+2nlx_1+2mny_1]$

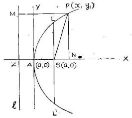
(அ - து) $(mx_1-ly_1)^2-2[\alpha(l^2+m^2)+nl]x_1$
$-2[\beta(l^2+m^2)+mn]y_1$
$+[(l^2+m^2)(\alpha^2+\beta^2)-n^2]=0.$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

$(mx-ly)^2+2gx+2fy+c=0$ வடிவில் இருக்கும்.

6·3. பரவளைவின் சமன்பாடு—நியமவடிவம்

குவியம் S எனவும், இயக்கு வரை l எனவும் கொள்வோம்.



படம் 48.

S வழியாக இயக்கு வரைக்கு XZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும். SZ-ஐ A-இல் இரு சமமாகப் பிரித்து A வழி SZ-க்குச் செங்குத்தாக AY என்ற கோடு வரையவும்.

AX, AY என்ற செங்குத்துக் கோடுகளை முறையே x, y ஆயங்களாகக் கொண்டால் A, S, Z புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(-a, 0)$ ஆகும்.

பரவளைவின் வரையறையின்படி A புள்ளி அவ் வளைவின் மீது அமையும். $P(x_1, y_1)$ என்பது பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி யெனின், P-யிலிருந்து இயக்கு வரைக்கு வரையப்படும் PM என்ற செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $(x_1 + a)$ ஆகும்.

மேலும், $SP = \sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2}$

வரையறையின்படி $\dfrac{SP}{PM} = e = 1$

(அ - து) $SP^2 = PM^2$

$$(x_1 - a)^2 + y_1^2 = (x_1 + a)^2$$

$$\therefore \quad y_1^2 = 4ax_1$$

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு (P-யின் இயங்கு வழி)

$$y^2 = 4ax.$$

(அ - து) $PN^2 = 4AS.AN.$

6·4. பரவளைவின் முனை, அச்சு, முனையிடத்துத் தொடுகோடு

$A(0, 0)$ என்ற புள்ளி பரவளைவின் முனை (vertex) எனவும், x, y ஆயங்கள் முறையே அதன் அச்சு (axis), முனையிடத்துத் தொடுகோடு (tangent at the vertex) எனவும் கூறப்படுகின்றன.

6·5. செவ்வகலம் (Latus Rectum)

குவியம் (S) வழியாக x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு பரவளைவை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினால், LSL' எனும் நாண் பரவளைவின் செவ்வகலம் (latus rectum) எனப்படுகிறது.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவில் L புள்ளியின் y ஆயத்தொலை SL, x ஆயத்தொலை $AS = a$ ஆகும். L புள்ளி பரவளைவின் மீதுள்ளதால்,

$$y^2 = 4a.a = 4a^2$$

$$\therefore \quad y = \pm 2a$$

எனவே, $SL = 2a \quad \therefore$ செவ்வகலத்தின் நீளம்,

$$SL + SL' = 2a + 2a = 4a.$$

6·6. இயக்குவரை (Directrix)

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு இயக்குவரை y ஆயத்திற்கு இணையாக $-a$ தூரத்திலிருப்பதால் இயக்கு வரையின் சமன்பாடு,

$$x = -a$$

(அ-து) $x + a = 0.$

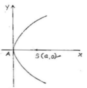
6·7. $Y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தன்மைகள்

x-இன் ஒவ்வொரு மதிப்பிற்கும் y சமமும் எதிருமான இரு மதிப்புக்கள் கொண்டிருக்கும். எனவே பரவளைவு x ஆயத்துடன் சமச்சீர் (symmetric) உடையதாகும்.

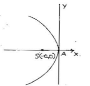
$x = 0$ எனில், $y = 0$. எனவே, பரவளைவு ஆதிவழிச் செல்லும். x-இன் எதிரெண் மதிப்புக்களுக்கு y-இன் மதிப்புக்கள் கற்பனை ஆதலின் பரவளைவின் புள்ளிகள் Y ஆயத்தின் இடப்புறமிரா. (அ-து) y ஆயத்தின் வலப்பக்கத்தில் வளைவரை இருக்கும்.

x-இன் மதிப்பு அதிகரிப்பின் y-இன் மதிப்பும் அதிகரிக்கும். x மதிப்புக் கந்தழியை (infinity) நெருங்கின் y-இன் மதிப்பும் கந்தழியை நெருங்கும். $y^2 = 4ax$ பரவிளைவின் அமைப்புப் படம் 43-இல் உள்ளது போலிருக்கும். பரவளைவின் இரு பிரிவுகளும் y ஆயத்திற்கு வலப்பக்கத்தில் கந்தழியை நெருங்கிச் செல்லும்.

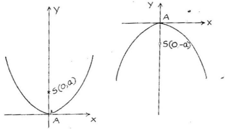
6·8. பரவளைவின் சில வடிவங்கள்



(i) $y^2 = 4ax$



(ii) $y^2 = -4ax$



(iii) $x^2 = 4ay$ (iv) $x^2 = -4ay$

படம் 44.

மாதிரி 1 : (1, 2) புள்ளியைக் குவியமாகவும், $x + y = 2$ கோட்டை இயக்கு வரையாகவும் கொண்ட பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி பரவளைவின் மீதுள்ளது எனக் கொள்வோம். S(1, 2) ஆதலின்,

$$SP = \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-2)^2}$$

$x + y - 2 = 0$ இயக்குவரையிலிருந்து $P(x_1, y_1)$ என்ற புள்ளிக்கு உள்ள தூரம்,

$$\frac{x_1 + y_1 - 2}{\pm\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

வரையறையின்படி,

$$\sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-2)^2} = \frac{x_1 + y_1 - 2}{\pm\sqrt{2}}$$

(அ - து) $2[(x_1-1)^2 + (y_1-2)] = (x_1 + y_1 - 2)^2.$

$$2[x_1^2 + y_1^2 - 2x_1 - 4y_1 + 5]$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 4 + 2x_1y_1 - 4x_1 - 4y_1$$

$$\therefore\ x_1^2 + y_1^2 - 2x_1y_1 - 4y_1 + 6 = 0$$

எனவே, பரவளைவின் சமன்பாடு (P-யின் இயங்கு வழி)

$$x^2 - 2xy + y^2 - 4y + 6 = 0.$$

மாதிரி 2 : $y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ என்ற பரவளைவின் செவ்வகலம், முனை, குவியம், அச்சு, இயக்கு வரை முதலியவற்றைக் காண்க.

$$y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$$

$$y^2 - 2y + 1 = -4x - 2$$

(அ-து) $(y-1)^2 = -4\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

ஆதியை $\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் பரவளைவின் சமன்பாடு $Y^2 = -4X$ என்றாகும்.

புதிய ஆயங்களைச் சார்ந்து $y^2 = -4x$ பரவளைவின்

செவ்வகலம்	$4 \quad [\because a = 1$
முனை	$(X=0,\ Y=0)$
குவியம்	$(X=-1,\ Y=0)$
அச்சு	$Y=0$
இயக்குவரை	$X-1=0.$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துச்
செவ்வகலம் 4

முனை $\left(x+\frac{1}{2}=0,\ y-1=0\right)$ (அ-து) $\left(-\frac{1}{2},\ 1\right)$.

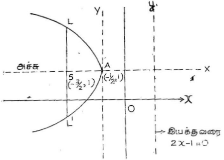
குவியம் $\left(x+\frac{1}{2}=-1,\ y-1=0\right)$ (அ-து) $\left(-\frac{3}{2},\ 1\right)$

அச்சுச் சமன்பாடு $y-1=0$.

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x + \frac{1}{2} - 1 = 0$

(அ-து) $2x - 1 = 0$.

பரவளேவின் படம் பின் வருமாறு இருக்கும்.



படம் 45

6·9. $y = mx + c$ கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளேவிற்குத் தொடு கோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$y^2 = 4ax \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளேத் தீர்க்க

$$(mx+c)^2 = 4ax$$

(அ-து) $m^2x^2 + 2(mc-2a)x + c^2 = 0 \quad \ldots \quad (3)$

இது x-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் x-க்கு இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. இவ்விரு மதிப்புக்களும் (1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள் x ஆயத் தொலேகளே அளிக்கும். கோடு (1), பரவளேவு (2)-இன் தொடுகோடெனில், x-இன் இரு மதிப்புக்களும் சமமாகும்.

$\therefore$ சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக் காட்டி பூச்சியமாகும்.

(அ - து) $4(mc-2a)^2 - 4m^2c^2 = 0$

$\therefore \quad a = cm$

(அ - து) $c = \frac{a}{m}$.

எனவே, $y = mx + c$ கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடு கோடெனில், $c = \frac{a}{m}$ ஆகும்.

(அ - து) $y = mx + \frac{a}{m}$ எனும் கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடு கோடாகும்.

6·10. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்குப் புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து இரு தொடு கோடுகள் வரையக் கூடும்

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்குப் புறத்தே உள்ள புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

பரவளைவின் தொடு கோடு $y = mx + \frac{a}{m}$.

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின் $y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}$.

(அ - து) $m^2x_1 - my_1 + a = 0$ ... ... (1)

இது m-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், m-மிற்கு இரு மதிப்புகள் உண்டு. அவைகள் m_1, m_2 எனக் கொள்வோம்.

இம்மதிப்புக்களை $y = mx + \frac{a}{m}$-இல் பிரதியிடின்,

$$y = m_1x + \frac{a}{m_1}$$

$$y = m_2x + \frac{a}{m_2}$$

என்ற இரு தொடுகோடுகள் கிடைக்கப்பெறும்.

எனவே, புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவிற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக்கூடும்.

கிளை : இயக்கு வரையிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக இருக்கும்.

6·11. $y^2=4ax$ பரவளைவிற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ என்பவை பரவளைவின் மீது மிக அருகாமையிலுள்ள புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad y_1^2 = 4ax_1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$y_2^2 = 4ax_2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனவே, $y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$

(அ-து) $$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \frac{4a}{y_1+y_2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

P, Q புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

(அ-து) $$y-y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

$$= \frac{4a}{y_1-y_2}(x-x_1) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (4)$$

[சமன்பாடு 3-இன் படி].

PQ என்ற நாண் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடெனின்,

$$x_2 = x_1, \quad y_2 = y_1.$$

இம்மதிப்புக்களை (4)-இல் பிரதியிடின்,

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x-x_1)$$

$$\therefore \quad yy_1 - y_1^2 = 2ax - 2ax_1$$

(அ-து) $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$

இரு பக்கமும் $-2ax_1$-ஐக் கூட்டினால்,

$yy_1 - 2a(x+x_1) = y_1^2 - 4ax_1 = 0$ [$\because$ சமன்பாடு (1)]

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0.$$

6·12. $y = mx + \frac{a}{m}$ தொடுகோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளைவைத் தொடும் புள்ளி

$$y = mx + \frac{a}{m} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$y^2 = 4ax \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கோடு (1), பரவளைவு (2)-ஐத் தொடும் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துப் பரவளைவின் தொடுகோடு,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = 0.$$

(அ - து) $yy_1 - 2ax + 2ax_1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \; \frac{1}{y_1} = \frac{m}{2a} = \frac{\frac{a}{m}}{2ax_1}$$

$$\therefore \; x_1 = \frac{a}{m^2}, \; y_1 = \frac{2a}{m}.$$

எனவே, $y = mx + \frac{a}{m}$ தொடுகோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவைத் தொடும் புள்ளி $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

6·13. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகள்,

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$yy_2 = 2a(x + x_2) \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐத் தீர்க்க வெட்டும் புள்ளிகள் கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்

$$y(y_1 - y_2) = 2a(x_1 - x_2)$$

(அ-து) $y = \dfrac{2a(x_1-x_2)}{y_1-y_2}$

ஆனால் $\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = \dfrac{4a}{y_1+y_2}$ [பத்தி 6·11, சமன்பாடு 8]

$$\therefore \quad y = 2a\,\frac{y_1+y_2}{4a} = \frac{y_1+y_2}{2}$$

y-யின் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{y_1+y_2}{2}\,y_1 = 2a(x+x_1)$$

$$\therefore \quad x = \frac{\dfrac{(y_1+y_2)y_1}{2} - 2ax_1}{2a} = \frac{y_1^2 + y_1y_2 - 4ax_1}{4a}$$

$$= \frac{y_1y_2}{4a} \quad [\because \; y_1^2 - 4ax_1 = 0].$$

எனவே, (x_1, y_1), (x_2, y_2) புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left(\frac{y_1y_2}{4a},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

6·14. (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ எனின்,

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_1 = 2a(x+x_1)$$

தொடு கோட்டின் சரிவு $= \dfrac{2a}{y_1}$.

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சரிவு,

$$-\frac{y_1}{2a} \text{ ஆகும்.} \quad (\because \; m_1m_2 = -1).$$

எனவே, செங்கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = \frac{-y_1}{2a}(x - x_1).$$

மாதிரி 3 : குவியம் (S) வழிச் செல்லும் ஒரு கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, P' புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. P, P' புள்ளிகளிடத்துப் பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையின்மீது தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக.

$P(x_1, y_1)$, $P'(x_2, y_2)$ எனக் கொள்வோம்.

PP' என்ற நாணின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - y_1}{y_1 - y_2} = \frac{x - x_1}{x_1 - x_2}.$$

(அ - து) $y - y_1 = \dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1).$

ஆனால், $\dfrac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}$ [பத்தி 6·11-சமன்பாடு 3].

$$\therefore \; y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1)$$

இது குவியம் $S(a, 0)$ வழிச் செல்கிறது.

எனவே, $-y_1 = \dfrac{4a}{y_1 + y_2}(a - x_1)$

(அ - து) $-y_1^2 - y_1 y_2 = 4a^2 - 4ax_1$

$$\therefore \; y_1 y_2 = -4a^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$[\because \; y_1^2 - 4ax_1 = 0]$$

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகளிடத்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் முறையே,

$$\frac{2a}{y_1}, \; \frac{2a}{y_2}.$$

இவைகள் தம்முள் செங்குத்தானவையாதலின்,

$$\frac{2a}{y_1} \cdot \frac{2a}{y_2} = -1$$

(அ - து) $y_1 y_2 = -4a^2$

இது (1)-இன்படி மெய்யாதலின், (x_1, y_1), (x_2, y_2) புள்ளிகளிடத்து வரையும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டும்.

மேலும் இரு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி,

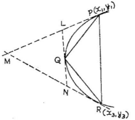
$$\left(\frac{y_1 y_2}{4a}, \ \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \quad [\text{பத்தி } 6\cdot 13]$$

வெட்டும் புள்ளியின் x ஆயத் தொலை,

$$x = \frac{y_1 y_2}{4a} = \frac{-4a^2}{4a} = -a.$$

எனவே, அத் தொடுகோடுகள் $x + a = 0$ என்ற இயக்கு வரையின் மீது வெட்டும்.

மாதிரி 4 : P, Q, R என்ற உச்சிகளைப் பரவளைவின்மீது கொண்டுள்ள ஒரு முக்கோணத்தின் பரப்பு, அவ் வளைவிற்கு அப் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பில் இரு மடங்காகும் என நிறுவுக.



படம் 46.

பர வளைவு $y^2 = 4ax$ எனவும், P, Q, R புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனவும் கொள்வோம்.

$P(x_1y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$Q(x_2y_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_2 = 2a(x + x_2) \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$R(x_3y_3)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_3 = 2a(x + x_3) \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

தொடுகோடுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி,

$$L\left(\frac{y_1y_2}{4a},\ \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

தொடு கோடுகள் (2), (3) வெட்டும் புள்ளி,

$$N\left(\frac{y_2y_3}{4a},\ \frac{y_2 + y_3}{2}\right)$$

தொடுகோடுகள் (3), (1) வெட்டும் புள்ளி,

$$M\left(\frac{y_3y_1}{4a},\ \frac{y_3 + y_1}{2}\right).$$

$$\therefore\quad \triangle LMN = \frac{1}{2}\left[\frac{y_1y_2}{4a}\left(\frac{y_2+y_3}{2} - \frac{y_3 + y_1}{2}\right) + \frac{y_2y_3}{4a}\left(\frac{y_3 + y_1}{2} - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + \frac{y_3y_1}{4a}\left(\frac{y_1 + y_2}{2} - \frac{y_2 + y_3}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16a}\left[y_1y_2(y_2-y_1) + y_2y_3(y_3-y_2) + y_3y_1(y_1-y_3)\right].$$

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}\left[x_1(y_2-y_3) + x_2(y_3-y_1) + x_3(y_1-y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{y_1^2}{4a}(y_2-y_3) + \frac{y_2^2}{4a}(y_3-y_1) + \frac{y_3^2}{4a}(y_1-y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{8a}\left[y_1^2(y_2-y_3) + y_2^2(y_3-y_1) + y_3^2(y_1-y_2)\right]$$

$$= \frac{1}{8a}[y_1y_2(y_1-y_2) + y_2y_3(y_2-y_3) + y_3y_1(y_3-y_1)]$$

$$= -\frac{1}{8a}[y_1y_2(y_2-y_1) + y_2y_3(y_3-y_2) + y_3y_1(y_1-y_3)]$$

$\therefore$ $\triangle PQR$-இன் எண்ணளவு,

$$= \frac{1}{8a}[y_1y_2(y_2-y_1) + y_2y_3(y_3-y_2) + y_3y_1(y_1-y_3)].$$

$$2\triangle LMN = 2\frac{1}{16a}[y_1y_2(y_2-y_1) + y_2y_3(y_3-y_2) + y_3y_1(y_1-y_3)]$$

$$= \frac{1}{8a}[y_1y_2(y_2-y_1) + y_2y_3(y_3-y_2) + y_3y_1(y_1-y_3)]$$

$$= \triangle PQR$$

மாதிரி 5 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு வரையும் இரு தொடு கோடுகள் x அச்சுடன் ஏற்படுத்தும் கோணங்கள் θ_1, θ_2. $\tan\theta_1, \tan\theta_2$ ஒரு மாறிலி எனின், அத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி (x_1, y_1) எனில், இப் புள்ளி வழிச் செல்லும் இரு தொடு கோடுகளின் சரிவுகளான m_1, m_2 என்பவை பத்தி 6·10-இல் சமன்பாடு (1)-இன் படி,

$$m^2x_1 - my_1 + a = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் மூலம் கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore \quad m_1 + m_2 = \frac{y_1}{x_1}$$

$$m_1m_2 = \frac{a}{x_1}.$$

$\tan\theta_1, \tan\theta_2$ = ஒரு மாறிலி = K (என்க)

$$\therefore \quad m_1m_2 = K$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{a}{x_1} = K.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{a}{x} = K$$

(அ-து) $Kx - a = 0$ ஆகும்.

6·15. துணை அலகு (Parameter)

t-யின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $x = at^2$, $y = 2at$ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் பொருந்தும். எனவே, t-யின் எல்லா மதிப்புக்களுக்கும் $(at^2, 2at)$ என்ற புள்ளி அப்பரவளைவின் மீதமையும். t-க்குத் துணை அலகு என்று பெயர். எனவே, $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியை 't' எனக் குறிப்பிடின், அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$ எனப் பொருள்.

6·16. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின்மீது $P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு

பரவளைவு $y^2 = 4ax$.

P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே

$$(at_1^2, 2at_1), (at_2^2, 2at_2).$$

∴ PQ கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{y - 2at_1}{2at_1 - 2at_2} = \frac{x - at_1^2}{at_1^2 - at_2^2}$$

(அ-து) $$\frac{y - 2at_1}{2} = \frac{x - at_1^2}{t_1 + t_2}$$

∴ $$y(t_1 + t_2) = 2x - 2at_1^2 + 2at_1(t_1 + t_2)$$

(அ-து) $$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2$$

∴ நாண் PQ-வின் சமன்பாடு,

$$y(t_1 + t_2) = 2x + 2at_1t_2.$$

கிளை : 't_1' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு,

$$y(t_1 + t_1) = 2x + 2at_1^2$$

(அ-து) $$y = \frac{x}{t_1} + at_1.$$

6·17. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள்,

$$yt_1 = x + at_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$yt_2 = x + at_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$y(t_1 - t_2) = a(t_1^2 - t_2^2)$$

$$\therefore \quad y = a(t_1 + t_2).$$

இம் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்,

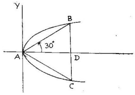
$$a(t_1 + t_2)t_1 = x + at_1^2$$

$$\therefore \quad x = at_1t_2.$$

எனவே, $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு 't_1', 't_2' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\{at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)\}\ .$$

மாதிரி 6 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவினுள் வரையப்படும் சமபக்க முக்கோணத்தின் உச்சிகளில் ஒன்று பரவளைவின் முனையெனில், அம்முக்கோணத்தின் பக்கத்தின் நீளம் காண்க.



படம் 47

$y^2 = 4ax$ பரவளைவின் முனை $A(0, 0)$. ABC என்பது பரவளைவின் உள் வரையப்பட்டுள்ள முக்கோணம் (inscribed triangle).

ஆதிவழிச் செல்லும் AB கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x-0}{\cos 30} = \frac{y-0}{\sin 30} = r.$$

எனவே, AB கோட்டின் மீதுள்ள B புள்ளியின் ஆய்த் தொலைகள் $(r\cos 30,\ r\sin 30)$.

இப்புள்ளி பரவளைவின் மீதமைந்துள்ளதாதலின்,

$$(r\sin 30)^2 = 4a\,(r\cos 30)$$

$$r^2 \sin^2 30 = 4ar\cos 30$$

$$r\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 4a\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\therefore\ r = 4a\,\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{1}$$

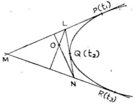
$$(\text{அ - து})\quad r = 8a\sqrt{3}.$$

எனவே, AB பக்கத்தின் நீளம் $8a\sqrt{3}$.

மாதிரி 7 : ஒரு பரவளைவின் மூன்று தொடுகோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சந்தி (orthocentre) இயக்கு வரையின் மீதமையும் என நிறுவுக.

பரவளைவு $y^2=4ax$ எனவும், அதன்மீது அமைந்துள்ள யாதேனும் மூன்று புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்,

$P(at_1^2,\ 2at_1)$, $Q(at_2^2,\ 2at_2)$, $R(at_3^2,\ 2at_3)$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 48

P, Q, R புள்ளிகளிடத்து வரையும் தொடுகோடுகள் முறையே ML, LN, NM எனக் கொள்வோம்.

அவைகளின் சமன்பாடுகள் முறையே

$$yt_1 = x + at_1^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$yt_2 = x + at_2^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$yt_3 = x + at_3^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$\therefore$ L-லின் ஆயத்தொலைகள் $[at_1t_2,\ a(t_1+t_2)]$

N-னின் ஆயத்தொலைகள் $[at_2t_3,\ a(t_2+t_3)]$

M-மின் ஆயத்தொலைகள் $[at_3t_1,\ a(t_3+t_1)]$

MN-க்குச் செங்குத்தாக L வழிச் செல்லும் LA கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - a(t_1+t_2) = -t_3[x - at_1t_2] \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

LM-க்குச் செங்குத்தாக N வழிச் செல்லும் NB கோட்டின் சமன்பாடு,

$$y - a(t_2+t_3) = -t_1[x - at_2t_3] \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

இவ்விரண்டு செங்குத்துக் கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி குத்துக் கோட்டுச் சந்தியாகும்.

(5)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$a(t_1+t_2) - a(t_2+t_3) = t_3[x - at_1t_2] - t_1[x - at_2t_3]$$

(அ - து) $a(t_1-t_3) = x(t_3-t_1)$

$\therefore \quad x = -a.$

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சந்தி $x + a = 0$ என்ற இயக்குவரையின் மீதமையும்.

சமன்பாடு (4)-இல் $x = -a$ எனப் பிரதியிடின்,

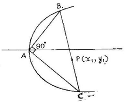
$$y = a[t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3].$$

எனவே, குத்துக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$[-a,\ a(t_1 + t_2 + t_3 + t_1t_2t_3)].$$

மாதிரி 8 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் முனையில் நேர்க் கோணத்தை ஏற்கும் அதன் நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவின் முனை A-யில் நேர்க் கோணத்தை ஏற்கும் நாண்களில் ஒன்று BC எனக் கொள்வோம்.



படம் 49.

BC-இன் நடுப் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனவும், B, C புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனவும் கொள் வோம்.

$$\therefore \quad x_1 = \frac{at_1^2 + at_2^2}{2} \quad \ldots \quad (1)$$

$$y_1 = \frac{2at_1 + 2at_2}{2} \quad \ldots \quad (2)$$

$$AB \text{ கோட்டின் சரிவு} = \frac{2at_1}{at_1^2} = \frac{2}{t_1}$$

$$AC \text{ கோட்டின் சரிவு} = \frac{2at_2}{at_2^2} = \frac{2}{t_2}$$

AB, AC கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$\frac{2}{t_1} \cdot \frac{2}{t_2} = -1 \quad (\text{அ-து}) \quad t_1 t_2 = -4 \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-இலிருந்து t_1, t_2-ஐ நீக்கினல் P-யின் இயங்கு வழி கிடைக்கப் பெறும்,

(1)-இலிருந்து $\frac{2x_1}{a} = t_1^2+t_2^2$

(2)-இலிருந்து $\frac{2y_1}{a} = 2(t_1 + t_2)$.

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1t_2$$

$$\therefore \left(\frac{y_1}{a}\right)^2 = \frac{2x_1}{a} - 8 \qquad (\because \ t_1t_2 = -4)$$

(அ-து) $y_1^2 = (2x_1 - 8a)a$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$y^2 = 2a(x-4a).$$

6·18. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு t_1 புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y = \frac{x}{t_1} + at_1$$

தொடுகோட்டின் சரிவு $= \frac{1}{t_1}$

$\therefore$ செங்கோட்டின் சரிவு $= -t_1$ $\quad [\because m_1m_2 = -1]$.

t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$y - 2at_1 = -t_1(x - at_1^2)$$

(அ-து) $xt_1 + y = 2at_1 + at_1^3$.

எனவே, t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் (normal) சமன்பாடு,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3,$$

6·19. செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு

t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$x(t_1-t_2)=2a(t_1-t_2)+a(t_1^3-t_2^3)$$

(அ-து) $x(t_1-t_2)=2a(t_1-t_2)+a(t_1-t_2)(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)$

$\therefore \quad x=2a+a(t_1^2+t_1t_2+t_2^2) \qquad [\because \; t_1-t_2\neq 0]$

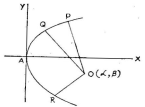
x-இன் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்

$$y+[2a+a(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]t_1 = 2at_1+at_1^3.$$

$$\therefore \; y = -a(t_1t_2+t_2^2 t_1)$$
$$= -at_1t_2(t_1+t_2).$$

எனவே, t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $[2a+a(t_1^2+t_1t_2+t_2^2), -at_1t_2(t_1+t_2)]$.

6·20 குறித்த புள்ளி வழி ஒரு பரவளைவுக்கு மூன்று செங்கோடுகள் வரையக்கூடும்



படம் 50

குறித்த புள்ளி $O(\alpha, \beta)$ எனவும், இப்புள்ளி வழிச்செல்லும் செங்கோட்டின் அடிப்புள்ளி 't' எனவும் கொள்வோம்

பரவளைவுக்கு 't' புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y+xt = 2at+at^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது $O(\alpha, \beta)$ வழிச் செல்வதால்,

$$\beta+\alpha t = 2at+at^3.$$

(அ-து) $at^3+(2a-\alpha)t-\beta=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

இது 't'-யில் முப்படிச் சமன்பாடாதலின், t-க்கு மூன்று மதிப்புக்கள் உண்டு. அவை ஒவ்வொன்றிற்கும் (α, β) வழிச் செல்லும் ஒரு செங்கோடு உண்டு. எனவே, குறித்த புள்ளி வழி மூன்று செங்கோடுகள் பரவளைவிற்கு வரையக்கூடும். இவை மூன்றும் மெய்யானவைகளாகவோ, ஒன்று மெய்யானதாகவும் மற்ற இரண்டும் கற்பனையானவையாகவுமோ இருக்கும்.

மேலும் (2)-இன் மூலங்கள் t_1, t_2, t_3 எனில்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a-\alpha}{a} \qquad \dots \qquad \dots \qquad (4)$$

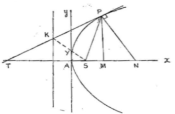
$$t_1t_2t_3 = \frac{\beta}{a} \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (5)$$

6·21. பரவளைவின் பண்புகள் (Properties)

1. $y^2=4ax$ பரவளைவில் P புள்ளியிடத்து வரையப்படும் தொடுகோடும் செங்கோடும் பரவளைவின் அச்சை முறையே T, N புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன. A பரவளைவின் முனை, x ஆயத்திற்கு PM செங்குத்துக்கோடெனில்,

(i) $ST=SN=SP$

(ii) $AM=AT$.



படம் 51

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(at^2, 2at)$ எனக்கொள்க.

P யிடத்துத் தொடுகோடு $yt=x+at^2$.

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின், $x=-at^2$.

$\therefore$ T-யின் ஆயத்தொலைகள் $[-at^2, 0]$.

P-யிடத்துச் செங்கோடு, $y+xt=2at+at^3$.

N-புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியம். $\therefore$ $x=2a+at^2$.

எனவே, N-னின் ஆயத்தொலைகள் $[2a+at^2, 0]$.

S புள்ளியின் (குவியம்) ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$.

(i) $TS = TA + AS = at^2 + a.$

$SN = AN - AS = (2a + at^2) - a = at^2 + a.$

$SP = \sqrt{(at^2-a)^2 + (2at)^2}$

$= \sqrt{\{a^2t^4 + a^2 - 2a^2t^2 + 4a^2t^2\}}$

$= \sqrt{\{a^2t^4 + 2a^2t^2 + a^2\}}$

$= \sqrt{a^2\{t^4 + 2t^2 + 1\}}$

$= \sqrt{a^2(t^2+1)^2} = a(t^2+1) = at^2 + a.$

$\therefore$ $ST = SN = SP.$

(ii) $AM = P$-இன் x ஆயத் தொலை $= at^2$.

$AT = T$-இன் x ஆயத் தொலை $= -at^2$.

$= at^2$ (எண்ணளவு).

$\therefore$ $AM = AT$.

2. P புள்ளியிடத்து வரையும் தொடுகோடு பரவளைவின் முனை A-இடத்து வரையும் தொடு கோட்டை Y-இல் சந்திப்பின், SY கோடு PT கோட்டிற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும்.

மேலும் $SY^2 = AS.SP$. (படம் 51).

$P(at^2, 2at)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$yt = x + at^2$.

Y புள்ளியின் x ஆயத் தொலை பூச்சியம்

$\therefore$ Y-இன் ஆயத் தொலைகள் $(0, at^2)$

$m_1 = SY$ கோட்டின் சரிவு $= \dfrac{at-0}{0-a} = -t.$

$m_2 = PT$-இன் சரிவு $= \dfrac{1}{t}$

$m_1 m_2 = (-t)\left(\dfrac{1}{t}\right) = -1$

$\therefore$ SY கோடு PT-க்குச் செங்குத்தாகும்.

மேலும், $SY^2 = (a-0)^2 + (0-at)^2$

$= a^2 + a^2t^2.$

$AS = S$-இன் x ஆயத்தொலை $= a.$

$SP = a+at^2$ [பத்தி 6·21, பண்பு 1]

$\therefore$ $AS.SP = a.(a+at)^2 = a^2+a^2t^2.$

எனவே, $SY^2 = AS.SP.$

3. P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு இயக்கு வரையை K புள்ளியில் சந்திப்பின்,

$K\hat{S}P = 90°.$ [படம் 51]

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $yt = x + at^2.$

இயக்குவரை $x = -a.$

$\therefore$ K புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left(-a, \frac{at^2-a}{t}\right)$$

S-இன் ஆயத் தொலைகள் $(a, 0)$

P-யின் ஆயத் தொலைகள் $(at^2, 2at)$

$m_1 = KS$ கோட்டின் சரிவு

$$= \frac{\frac{at^2-a}{t}-0}{-a-a} = \frac{t^2-1}{-2t}$$

$m_2 =$ SP கோட்டின் சரிவு,

$$= \frac{0-2at}{a-at^2} = \frac{-2t}{1-t^2}$$

$$\therefore \; m_1 m_2 = \left(\frac{t^2-1}{-2t}\right)\left(\frac{-2t}{1-t^2}\right) = -1.$$

எனவே, $K\hat{S}P = 90°$

4. பரவளைவுதன் வரைசெங்கோட்டடி (subnormal) நீளம் ஒரு மாறிலி.

படம் 51-இல் MN வரைசெங்கோட்டடியாகும்.

$$MN = AN - AM = (2a + at^2) - at^2 = 2a$$

எனவே, வரை செங்கோட்டடி ஒரு மாறிலியாகும்.

6·22. ஒரு வட்டம் $y^2 = 4ax$ பரவளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அப் புள்ளிகளின் y ஆயத் தொலைகளின் (குத்தாயங்கள்-Ordinates) கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ... ... (1)

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ... (2)

வட்டம் பரவளைவை 't' புள்ளியில் வெட்டினுல், அப் புள்ளி $(at^2, 2at)$ வட்டத்தின் மேலமையும்.

$$\therefore \; (at^2)^2 + (2at)^2 + 2g(at^2) + 2f(2at) + c = 0$$

(அ - து) $a^2t^4 + 2a(2a+g)t^2 + 4aft + c = 0$ ... (3)

இது t-இல் நாற்படிச் சமன்பாடாதலின் t-க்கு நான்கு மதிப்புக்கள் உண்டு.

எனவே, வட்டம் பரவளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனில்,

$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$ ... ... (4)

$t_1t_2 + t_1t_3 + t_4t_1 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = \frac{2(2a+g)}{a}$ ...(5)

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{4f}{a} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (6)$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = \frac{c}{a^2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (7)$$

சமன்பாடு (4)-இலிருந்து, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0$

(அ - து) $2at_1 + 2at_2 + 2at_3 + 2at_4 = 0.$

எனவே, வெட்டும் புள்ளிகளின் குத்தாயங்களின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

மாதிரி 9: $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு யாதேனும் இரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் P புள்ளியில் செங்கோணத்தில் தம்முள் வெட்டினுல், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு A, B புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் P-யில் வெட்டட்டும். A, B, P புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$, (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ A, B புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3, \quad \text{சரிவு} = -t_1$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3, \quad \text{சரிவு} = -t_2.$$

இச்செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின்

ஆயத்தொலைகள் $[2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2), -at_1 t_2 (t_1 + t_2)]$

$$\therefore \quad x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2) \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$y_1 = -at_1 t_2 (t_1 + t_2) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

செங்கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$(-t_1)(-t_2) = -1$$

(அ - து) $t_1 t_2 = -1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)-இலிருந்து t_1, t_2-ஐ நீக்கின் $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்.

(1)-இலிருந்து $\frac{x_1-2}{a} = t_1^2+t_2^2-1$ $\quad [\because t_1t_2=-1]$

(2)-இலிருந்து $\frac{y_1}{a} = (t_1+t_2)$

$$(t_1+t_2)^2 = t_1^2+t_2^2+2t_1t_2 = t_1^2+t_2^2-2$$

(அ - து) $\frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1-2a}{a} - 1$

$$\therefore \quad \frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1-3a}{a}$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x-3a}{a}$$

(அ - து) $y^2 = a(x-3a)$.

மாதிரி 10 : $A(t_1)$ புள்ளியிடத்துப் பரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடு பரவளைவை மறுபடியும் $B(t_2)$ புள்ளியில் வெட்டினால்,

$$t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1} \text{ என நிறுவுக.}$$

AB நாணின் சமன்பாடு,

$$y(t_1+t_2) = 2x+2at_1t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$A(t_1)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y+xt_1 = 2at_1+at_1^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1), (2) சமன்பாடுகள் ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும் ஆதலின்,

$$\frac{t_1+t_2}{1} = -\frac{2}{t_1} = \frac{2at_1t_2}{2at_1+at_1^3}$$

முதலிரு விகிதங்களிலிருந்து,

$$t_1+t_2 = -\frac{2}{t_1}.$$

$$\therefore \quad t_2 = -t_1 - \frac{2}{t_1}.$$

மாதிரி 11: P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் மூன்று செங்கோடுகள் பரவளைவின் அச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் தம் x ஆயத்தொலைகள் கூட்டுத் தொடரில் (arithmetic progression) இருப்பின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க. இப்புள்ளிகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி பரவளைவின் அச்சின் மீதமையும் என நிறுவுக.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கும் வரையும் செங்கோடுகள் தம் அடிப்புள்ளிகளை,

$$at^3 + (2a - x_1)t - y_1 = 0 \quad \text{[பத்தி 6·20-சமன்பாடு (2)]}$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து அறியலாம்.

அடிப் புள்ளிகள் 't_1', 't_2', 't_3' எனில்,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = \frac{2a - x_1}{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{y_1}{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3$$

$$y + xt_3 = 2at_3 + at_3^3.$$

இவைகள் பரவளைவின் அச்சை முறையே L, M, N புள்ளிகளில் வெட்டுவதாகக் கொள்வோம்.

பரவளைவின் அச்சு x ஆயமாதலின் L, M, N புள்ளிகளின் y ஆயத்தொலைகள் பூச்சியம். எனவே, L, M, N புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் முறையே $[2a + at_1^2, 0]$, $[2a + at_2^2, 0]$, $[2a + at_3^2, 0]$.

இவைகள் கூட்டுவிருத்தியிலிருப்பின்,

$$2a + at_2^2 = \frac{(2a + at_1^2) + (2a + at_3^2)}{2}$$

(அ-து) $4a + 2at_2^2 = 4a + at_1^2 + at_3^2$

(அ-து) $2t_2^2 = t_1^2 + t_3^2$ ... ... (4)

$\therefore \quad 3t_2^2 = t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$

$= (t_1 + t_2 + t_3)^2 - 2(t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3)$

$= -\dfrac{2(2a - x_1)}{a}$ ... ... (5)

மேலும், $t_2 = -(t_1 + t_3)$ [$\because$ சமன்பாடு (1)]

$\therefore \quad t_2^2 = (t_1 + t_3)^2$

$= t_1^2 + t_3^2 + 2t_1 t_3$

$= 2t_2^2 + 2t_1 t_3$ [$\because$ சமன்பாடு (4)]

$\therefore \quad -t_2^2 = 2t_1 t_3$ ... ... (6)

சமன்பாடு (3)-இலிருந்து $t_1 t_3 = \left(\dfrac{y_1}{at_2}\right)$

ஆனால் சமன்பாடு (6)-இலிருந்து $t_1 t_3 = -\dfrac{t_2^2}{2}$.

$\therefore \quad \dfrac{2y_1}{a} = -t_2^3$ ... ... (7)

(5)-இலிருந்து $27t_2^6 = \dfrac{-8(2a - x_1)^3}{a^3}$

(7)-இலிருந்து $t_2^6 = \dfrac{4y_1^2}{a^2}$

$\therefore \quad \dfrac{4y_1^2}{a^2} = \dfrac{-8(2a - x_1)^3}{27a^3}$

(அ-து) $27ay_1^2 = 2(x_1 - 2a)^3$.

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$27ay^2 = 2(x - 2a)^3.$$

மீண்டும், t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (x_0, y_0) எனில்,

$$x_0 = \frac{at_1^2 + at_2^2 + at_3^2}{3} = \frac{a}{3}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2)$$

$$y_0 = \frac{2at_1 + 2at_2 + 2at_3}{3} = \frac{2a}{3}(t_1 + t_2 + t_3)$$

$$= 0. \quad [\because \; t_1+t_2+t_3=0].$$

எனவே, மையக் கோட்டுச் சந்தியின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left[\frac{a}{3}(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2),\ 0\right].$$

(அ - து) மையக் கோட்டுச் சந்தியின் y ஆயத் தொலை பூச்சியம். எனவே, மையக் கோட்டுச் சந்தி அச்சின் (x ஆயம்) மீதமையும்.

மாதிரி 12 : பரவளைவுக்கு ஒரு புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் மூன்று செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளின் y ஆயத்தொலைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியம் என நிறுவுக. அடிப்புள்ளிகள் இரண்டிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடுகள் பரவளை வின்மீது தம்முள் வெட்டுவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு காண்க.

(α, β) புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள்

$$at^3 + (2a - \alpha)t - \beta = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$\therefore \quad t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_1 = \frac{2a-\alpha}{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$t_1t_2t_3 = \frac{\beta}{a} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2)-இலிருந்து $t_1 + t_2 + t_3 = 0$

$$\therefore \quad 2at_1 + 2at_2 + 2at_3 = 0$$

எனவே, அடிப்புள்ளிகள் தம் y ஆயத்தொலைகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

மேலும் t_1, t_2 என்ற அடிப்புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் t_3 புள்ளியில் பரவளைவின்மீது தம்முள் வெட்டும் எனக் கொள்வோம்.

எனவே, t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் $(at_3^2, 2at_3)$ புள்ளியில் வெட்டுகின்றன.

$$\therefore \text{ சமன்பாடு (4)-இலிருந்து } t_1t_2t_3 = \frac{2at_3}{a}$$

(அ - து) $t_1t_2 = 2$.

எனவே, தேவையான கட்டுப்பாடு $t_1t_2 = 2$.

மாதிரி 13 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்குப் புறத்தேயுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து அவ்வளைவுக்கு வரையப்படும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம், பரவளைவின் முனை வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் t_1, t_2, t_3 எனக்கொள்வோமெனில்,

பத்தி 6·20-சமன்பாடு (3)-இன் படி,

$$t_1 + t_2 + t_3 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

t_1, t_2, t_3 புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வட்டம் பரவளைவை t_4 புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனின்,

பத்தி 6·22-சமன்பாடு (4)-இன் படி,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad t_4 = 0.$$

(அ- து) t_4 புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (0, 0).

எனவே, வட்டம் பரவளைவின் முனை (0, 0) வழிச் செல்லும்.

மாதிரி 14 : P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டடி (subtangent) நீளம் P புள்ளியின் x ஆயத்தொலையின் இரு மடங்கு என நிறுவுக.

படம் 51-இல் TM தொடுகோட்டடியாகும். $P(at^2, 2at)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yt = x + at^2$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின்

T-யின் ஆயத்தொலைகள் $(-at^2, 0)$.

$$TN = TA + AN = at^2 + at^2 = 2at^2$$

எனவே, தொடுகோட்டடி P புள்ளியின் x ஆயத்தொலையின் இரு மடங்காகும். மேலும் முனையிடத்து இத்தொடுகோட்டடி TN இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படுகிறது.

மாதிரி 15 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளில் இரண்டு x ஆயத்துடன் நிரப்புக் கோணங்கள் (complementary angles) பிறப்பிக்குமெனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடுகள்,

$$y + xt_1 = 2at_1 + at_1^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$y + xt_2 = 2at_2 + at_2^3 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

இவைகளிரண்டும் வெட்டும் புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனின்,

$$x_1 = 2a + a(t_1^2 + t_1t_2 + t_2^2) \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_1 = -at_1t_2(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இச் செங்கோடுகளில் ஒன்று x ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் கோணம் θ எனின், மற்றது $(90-\theta)$ கோணத்தைப் பிறப்பிக்கும். எனவே, அவைகளின் சரிவு முறையே $\tan\theta$, $\tan(90-\theta)$ ஆகும். சரிவுகளின் பெருக்குத்தொகை $\tan\theta . \tan(90-\theta) = 1$. சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து செங்கோடுகளின் சரிவுகள் $-t_1, -t_2$ ஆதலின், சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை t_1t_2 ஆகும்.

எனவே, $t_1t_2 = 1$.

சமன்பாடு (3)-இலிருந்து, $\frac{x_1 - 2a}{a} = t_1^2 + t_2^2 + t_1t_2$.

சமன்பாடு (4)-இலிருந்து, $\frac{-y_1}{a} = t_1 t_2(t_1 + t_2)$.

(அ-து) $\frac{x_1 - 2a}{a} = t_1^2 + t_2^2 + 1$. ($\because t_1 t_2 = 1$).

$$\frac{-y_1}{a} = t_1 + t_2$$

$$(t_1 + t_2)^2 = t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2$$

$$= t_1^2 + t_2^2 + 2$$

$$\therefore \left(\frac{-y_1}{a}\right)^2 = \frac{x_1 - 2a}{a} + 1$$

(அ-து) $\frac{y_1^2}{a^2} = \frac{x_1 - 2a + a}{a}$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$\frac{y^2}{a^2} = \frac{x - a}{a}$$

(அ-து) $y^2 = a(x - a)$.

மாதிரி 16 : $y^2 = 4ax$, $x^2 = 4by$ பரவளைவுகளின் பொதுத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

பொதுத் தொடுகோடு $y = mx + c$ எனக் கொள்வோம்.

$y = mx + c$ கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்குத் தொடு கோடெனில், $c = \frac{a}{m}$.

இக் கோடு $x^2 = 4by$ பரவளைவுக்கும் தொடு கோடெனில், கோடும், இப் பரவளைவும் வெட்டும் புள்ளிகள் பொருந்தும் புள்ளிகளாகும்.

(அ-து) $x^2 = 4by = 4b[mx + c] = 4b\left[mx + \frac{a}{m}\right]$

(அ-து) $mx^2 - 4bm^2x - 4ab = 0$

சமன்பாட்டில் x-இன் இரு மதிப்புக்களும் சமம்.

$$\therefore \quad 16b^2m^4 + 16abm = 0$$

(அ - து) $b^2m^3 = -ab$. $\quad \therefore \quad m = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$.

$m = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}}$, $c = \frac{a}{m} = -a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$ எனப் பிரதியிடின்

$y = mx + c$ சமன்பாடு,

$$y = -\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{3}} - a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$\therefore$ பொதுத் தொடுகோடு $a^{\frac{1}{3}}x + b^{\frac{1}{3}}y + a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{3}} = 0$.

பயிற்சி 6.1.

1. கீழ்க்காணும் பரவளைவுகளின் சமன்பாடுகளைக் காண்க.

   (i) குவியம் $(3, 4)$, இயக்குவரை $2x - 3y + 5 = 0$.

   (ii) குவியம் $(-1, -1)$, இயக்குவரை $2x - 3y + 6 = 0$.

   (iii) குவியம் (a, b), இயக்குவரை $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

2. கீழ்க்காணும் பரவளைவுகளின் முனை, குவியம், இயக்குவரை, அச்சு முதலியவைகளைக் காண்க.

   (i) $x^2 - 4x - 5y - 1 = 0$

   (ii) $x^2 - 2ax + 2ay = 0$.

   (iii) $(x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{x + y - 1}{\sqrt{2}}\right)^2$.

3. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் மாறிலி α எனின், P-யின் இயங்குவழிக் காண்க. $\alpha = 90^\circ$ எனின், இயங்குவழி என்ன ?

4. பரவளைவின் இரு தொடுகோடுகள் செவ்வகலத்தின் நீட்டலில் வெட்டிக் கொண்டால், அத்தொடுகோடுகள் பரவளைவு அச்சுடன் நிரப்புக் கோணங்கள் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

5. $x^2+y^2=2a^2$, $y^2=8ax$ பரவளைவுகளின் பொதுத் தொடுகோடு $y=\pm(x+2a)$ என நிறுவுக.

6. $y^2 = 64x$ பரவளைவு, $4y = 3x - 48$ கோட்டில் ஏற்கும் நாணின் நீளம் என்ன ? இந்நாண் பரவளைவின் மூனையிடத்து ஏற்கும் கோணம் யாது ?

7. P புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையில் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டின் நீளம் d (ஒரு மாறிலி) எனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

8. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் குவிய நாண்களில் ஒன்றின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2) எனின் $x_1x_2=a^2$, $y_1y_2=-4a^2$ என நிறுவுக.

9. ஒரு பரவளைவின் உள் வரையப்பட்ட நாற்கரத்தின் (inscribed quadrilateral) மூன்று பக்கங்கள் பரவளைவு அச்சின் மீதுள்ள நிலைத்த புள்ளிகள் வழிச் செல்லின், நான்காவது பக்கமும் அச்சின் மீதுள்ள ஒரு நிலைத்த புள்ளிவழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

10. P புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் y ஆயத்துடன் ஏற்படுத்தும் முக்கோணத்தின் பரப்பு c^2 (மாறிலி) எனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

11. $y^2=4ax$ பரவளைவின் மூனையிடத்து 45° கோணம் ஏற்கும் நாண்களுக்கு ஆதியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

12. $y^2 = 4ax$ பரவளைவிற்கு P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள், $R(t)$ புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், PQ நாணின் சமன்பாடு $yt + 2(x + 2a) = 0$ என நிறுவுக.

13. $y^2=4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு, பரவளைவு அச்சுடன் α கோணம் பிறப்பிக்கிறது. இக்

கோடு பரவளைவை மீண்டும் β கோணத்தில் சந்திப்பின், $\tan \alpha = 2 \tan \beta$ என நிறுவுக.

14. PQ என்பது $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் குவிய நாண். P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பரவளைவை மீண்டும் P', Q' புள்ளிகளில் வெட்டினால், $P'Q'$ என்ற நாண் PQ நாணிற்கு இணை என நிறுவுக.

15. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு t_1, t_2, t_3 புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகளால் அமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{1}{2}a^2(t_1 - t_2)(t_2 - t_3)(t_3 - t_1)(t_1 + t_2 + t_3)^2$ என நிறுவுக.

16. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் Q-வில் வெட்டும். பரவளைவின் குவியம் S எனின், PSQ முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

17. $lx + my = 1$ கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. பரவளைவின் மீதுள்ள R புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{4am^2}{l^2}, -\frac{4am}{l} \right)$ எனின், இம் மூன்று புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

18. பரவளைவின் குவிய நாணின் நுனிகளிடத்து வரையும் தொடுகோடுகளின் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

19. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு $P(t)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டில், குவியம் S, P புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் ஏற்கும் நாணின் நீளம் யாது?

20. $P(2, 4)$ புள்ளியிடத்து $y^2 = 8x$ பரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடு பரவளைவை மீண்டும் $Q(18, -12)$ புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக. PQ கோட்டின் நீளம் காண்க.

21. PQ என்ற ஒரு செங்கோட்டு நாண் பரவளைவின் முனையிடத்து ஏற்கும் கோணம் $90°$ எனின், இந்நாண் பரவளை

வின் அச்சுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ என நிறுவுக.

22. பரவளைவு $y^2=4ax$-இன் இரு செங்கோடுகள் தம்முள் P புள்ளியில் செங்கோணத்தில் வெட்டுமெனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

23. $y^2=4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்டிற்கு ஒரு நிலைத்த புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

24. P புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் மூன்று செங்கோடுகளில் இரண்டு பொருந்தும் கோடு களெனில், P-யின் இயங்கு வழி $27ay^2 = 4(x-2a)^3$ என நிறுவுக.

25. பரவளைவின் மீதுள்ள L, M, N புள்ளிகளின் குத்தாயங் கள் பெருக்கு விருத்தியிலிருப்பின், (geometric progression) L, N புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் M புள்ளி யின் குத்தாயக் கோட்டின் (ordinate) மீது வெட்டும் என நிறுவுக.

26. P புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டு நாண் பரவளைவின் குவியத்தில் ஏற்கும் கோணம் 90° எனில், P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் சமம் என நிறுவுக

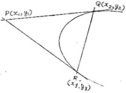
27. $y=mx+c$ எனும் கோடு $y^2 = 4a(x+a)$ பரவளைவின் தொடுகோடெனில் $c = \dfrac{a(1+m^2)}{m}$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (i) $9x^2 + 12xy + 4y^2 - 98x - 74y + 300 = 0$; (ii) $9x^2 + 12xy + 4y^2 + 2x + 62y - 10 = 0$; (iii) $(ax-by)^2 - 2a^3x - 2b^3y + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$. 2. (i) $(2, -1)$, $\left(2, \frac{1}{4}\right)$, $4y+9 = 0$, $x = 2$; (ii) $\left(a, \frac{a}{2}\right)$, $(a, 0)$, $y=a$, $x = a$; (iii) $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $(1, 2)$, $(x+y-1=0)$. 3. $y^2-4ax = (x+a)^2\tan^2\alpha$; $x+a = 0$. 6. $\left(\frac{640}{9}\right)$; $\tan^{-1}\left(\frac{20}{9}\right)$.

7. $(y^2-4ax)(x+a)^2 = d^2x^2$. 10. $x^2(y^2-4ax) = 4c^4$. 11. $(x^2+y^2-4ax)^2 = 16a(x^3+xy^2+ay^2)$. 16. $y^2(81y^2 + 180a^2-108ax) + 128a^4 = 0$. 18. $y^2 = a(x-3a)$. 19. $a\sqrt{1+t^2}$. 20. $16\sqrt{2}$. 22. $y^2=a(x-3a)$.

6·23. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண்



படம் 52.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2=4ax$ பரவளைவுக்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ எனக்கொள்வோம்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_2 = 2a(x+x_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad y_1y_2 = 2a(x_1 + x_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$R(x_3, y_3)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yy_3 = 2a(x + x_3) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad y_1y_3 + 2a(x_1 + x_3) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$yy_1 = 2a(x + x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

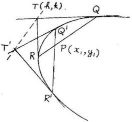
என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

இது குறிக்கும் கோடு (2)-இன் படி $Q(x_2, y_2)$ வழியும், (4)-இன் படி $R(x_3, y_3)$ வழியும் செல்லும்.

எனவே, QR நாணின் சமன்பாடு,

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ ஆகும்.

6·24. (x_1, y_1) புள்ளியின் $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 53.

$P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும் கோடு பரவளைவை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனவும், Q, R நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் $T(h, k)$ புள்ளியில் வெட்டுகின்றன எனவும் கொள்வோம்.

$T(h, k)$ புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண் QR ஆதலின், QR நாணின் சமன்பாடு,

$$yk = 2a(x + h) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறதாதலின்,

$$y_1k = 2a(x_1 + h) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே, $T(h, k)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி,

(அ - து) $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு,

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ ஆகும்.

இனி : பரவளேவின் குவியத்தின் $(a, 0)$, $y^2 = 4ax$ பரவளே வைச் சார்ந்த இசைக்கோடு,

$$y(0) = 2a(x+a)$$

(அ து) $x + a = 0$

எனவே, குவியத்தின் இசைக்கோடு அதன் இயக்குவரையாகும்.

6·25. $lx + my + n = 0$ கோட்டின் $y^2 = 4ax$ பரவளேவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி காணல்

$$lx + my + n = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

என்ற கோட்டின் $y^2 = 4ax \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$

பரவளேவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$yy_1 = 2a(x + x_1)$$

(அ - து) $yy_1 - 2ax - 2ax_1 = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{l}{-2a} = \frac{m}{y_1} = \frac{n}{-2ax_1}$$

எனவே, $x_1 = \frac{n}{l}, \quad y_1 = \frac{-2am}{l}$

$\therefore \quad lx+my+n=0$-த்தின் $y^2=4ax$ பரவளேவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி $\left(\frac{n}{l}, \frac{-2am}{l}\right)$.

6·26. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், Q-வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்

$y^2=4ax$ பரவளேவைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு, $yy_1=2a(x+x_1) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad y_2y_1 = 2a(x_2 + x_1) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (2)-இலிருந்து $Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு,

$$yy_2 = 2a(x + x_2)$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்கிறது என அறியலாம்.

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிகள் $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

6·27. $l_1x + m_1y + n_1 = 0$, $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோடுகள் துணையியக் கோடுகளாக இருப்பதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சார்ந்த $l_1x + m_1y + n_1 = 0$ கோட்டின் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனில்,

$$\text{பத்தி } 6 \cdot 26 \text{ படி } x_1 = \frac{n_1}{l_1}, \; y_1 = -\frac{2am_1}{l_1}$$

வரையறையின்படி இப் புள்ளி $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் மீதமையும்.

$$\therefore \; l_2\left(\frac{n_1}{l_1}\right) + m_2\left(\frac{-2am_1}{l_1}\right) + n_2 = 0.$$

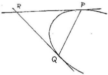
(அ - து) $n_1l_2 + n_2l_1 = 2am_1m_2$.

குறிப்பு : யாதேனும் இரு புள்ளிகளில் பரவளைவைச் சார்ந்த ஒரு புள்ளியின் இசைக் கோடு மற்றதன் வழிச் செல்லின் அப் புள்ளிகள் துணையியப் புள்ளிகள் (conjugate points) எனப்படும்.

யாதேனும் இரு கோடுகளில் பரவளைவைச் சார்ந்த ஒரு கோட்டின் இசைப் புள்ளி மற்றதன்மேல் அமையுமெனில், அவ்விரு கோடுகளும் இசைக் கோடுகள் எனப்படும்.

மாதிரி 17 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் $2l$ நீளமுள்ள நாணின் அவ் வளைவைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

பரவளைவில் PQ நாணின் நீளம் $2l$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 54.

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ எனில்,

$$PQ^2 = (at_1{}^2 - at_2{}^2)^2 + (2at_1 - 2at_2)^2$$
$$= a^2(t_1{}^2 - t_2{}^2)^2 + 4a^2(t_1 - t_2)^2$$

$PQ = 2l$ ஆதலின்,

$$4l^2 = a^2(t_1{}^2 - t_2{}^2)^2 + 4a^2(t_1 - t_2)^2$$
$$= a^2(t_1 - t_2)^2[(t_1 + t_2)^2 + 4] \quad \ldots \quad (1)$$

PQ நாணின் இசைப்புள்ளி $R(x_1 y_1)$ எனக் கொண்டால், P, Q புள்ளிகளிடத்து வரையும் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி R ஆகும்.

$P(t_1)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yt_1 = x + at_1{}^2$$

$Q(t_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$yt_2 = x + at_2{}^2.$$

இத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $[(at_1t_2,\ a(t_1 + t_2)]$

$$\therefore \ x_1 = at_1t_2$$
$$y_1 = a(t_1 + t_2).$$

(அ-து) $\dfrac{x_1}{a} = t_1t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$\dfrac{y_1}{a} = t_1 + t_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$$(t_1-t_2)^2 = (t_1+t_2)^2 - 4t_1t_2$$

$$= \frac{y_1^2}{a^2} - \frac{4x_1}{a} = \frac{y_1^2 - 4ax_1}{a^2} \quad \ldots \quad (4)$$

(3), (4)-ஐ, (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$4l^2 = a^2\left[\frac{y_1^2 - 4ax_1}{a^2}\right]\left[\frac{y_1^2}{a^2} + 4\right]$$

(அ - து) $4l^2a^2 = (y_1^2 - 4ax_1)(y_1^2 + 4a^2)$.

எனவே, இசைப்புள்ளி (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி

$$4a^2l^2 = (y^2 - 4ax)(y^2 + 4a^2).$$

மாதிரி 18 : $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளின் $y^2 = 4cx$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$y^2 = 4cx$-ஐச் சார்ந்த $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு,

$$yy_1 = 2c(x + x_1)$$

$$y = \frac{2cx}{y_1} + \frac{2cx_1}{y_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது, $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடெனின்,

$$\frac{2cx_1}{y_1} = \frac{a}{\frac{2c}{y_1}}. \quad \left[\because \ c = \frac{a}{m}\right].$$

(அ-து) $4c^2x_1 = ay_1^2$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

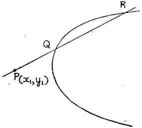
$$ay^2 = 4c^2x.$$

6·28. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.



படம் 55

இக் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta)$.

இக் கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவைச் சந்திக்கும் இடங்களில்,

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 + r\cos\theta)$$

(அ - து) $r^2\sin^2\theta + 2(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)r + y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad \dots \quad (2)$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் இரு மதிப்புக்கள் r_1, r_2 எனில், அவைகள் P புள்ளியிலிருந்து இக் கோடு பரவளைவை வெட்டும் Q, R புள்ளிகளின் தூரத்தைக் கொடுக்கும்.

இக் கோடு தொடுகோடெனில், $PQ = PR$.

(அ - து) $r_1 = r_2$

எனவே, சமன்பாடு (2)-இன் தீர்வுகள் சமம்.

$$\therefore \quad 4(y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta)^2 - 4\sin^2\theta(y_1^2 - 4ax_1) = 0$$

(அ - து) $(y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta)^2 = \sin^2\theta(y_1^2 - 4ax_1) \quad \ldots \quad (3)$

(1)-இலிருந்து $\dfrac{x - x_1}{r} = \cos\theta$

$$\frac{y - y_1}{r} = \sin\theta.$$

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

இம் மதிப்புக்களை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$\left[y_1 \frac{(y - y_1)}{r} - 2a\frac{x - x_1}{r}\right]^2 = \left(\frac{y - y_1}{r}\right)^2 [y_1^2 - 4ax_1]$$

(அ-து) $[(y - y_1)y_1 - 2a(x - x_1)]^2 = (y - y_1)^2(y_1^2 - 4ax_1)$.

(அ-து) $[(yy_1 - 2ax) - (y_1^2 - 2ax_1)]^2$
$= (y^2 + y_1^2 - 2yy_1)(y_1^2 - 4ax_1)$

(அ-து) $[\{yy_1 - 2a(x + x_1)\} - \{y_1^2 - 4ax_1\}]^2$
$= (y_1^2 - 4ax_1) = [\{y^2 - 4ax\} + \{y_1^2 - 4ax_1\}$
$- 2\{yy_1 - 2a(x + x_1)\}] \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

$S \equiv y^2 - 4ax$

$S_1 \equiv y_1^2 - 4ax_1$

$T = yy_1 - 2a(x + x_1)$ எனில்,

சமன்பாடு (4), $(T - S_1)^2 = S_1[S + S_1 - 2T]$ என்றாகும்.

$$\therefore \quad T^2 + S_1^2 - 2TS_1 = SS_1 + S_1^2 - 2TS_1.$$

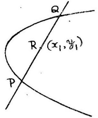
(அ - து) $T^2 = SS_1$.

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்,

$$T^2 = SS_1.$$

(அ-து) $[yy_1 - 2a(x + x_1)]^2 = (y^2 - 4ax)(y_1^2 - 4ax_1)$.

6·29. $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு



படம் 56.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$,

நாண் PQ எனவும், $R(x_1, y_1)$ நாணின் நடுப்புள்ளி எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனின், இக்கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1 + r\cos\theta, \quad y_1 + r\sin\theta)$.

இக்கோடு பரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளில்,

$$(y_1 + r\sin\theta)^2 = 4a(x_1 = r\cos\theta)$$

(அ-து) $r^2\sin^2\theta + 2\,(y_1\sin\theta - 2a\cos\theta)r$
$$+ y_1^2 - 4ax_1 = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் இதன் இரு மதிப்புக்களான r_1, r_2 என்பவை $R(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து வெட்டுப் புள்ளிகள் P, Q-வின் தூரங்களைக் கொடுக்கும்.

R புள்ளி, PQ-வின் நடுப்புள்ளியாதலின்,

$$r_1 = -r_2$$

(அ-து) $r_1 + r_2 = 0$.

∴ சமன்பாடு (2)-இன் தீர்வுகளின் கூட்டுத்தொகை பூச்சியம்.

$$\therefore \; y_1 \sin\theta - 2a\cos\theta = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(1)-இலிருந்து,

$$\cos\theta = \frac{x-x_1}{r}, \; \sin\theta = \frac{y-y_1}{r}$$

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{y_1(y-y_1)}{r} - 2a\frac{x-x_1}{r} = 0$$

(அ - து) $(y-y_1)y_1 - 2a(x-x_1) = 0$

$$\therefore \; yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$$

இரு பக்கமும் $-2ax_1$-ஐக் கூட்டினால்

$$yy_1 - 2a(x+x_1) = y_1^2 - 4ax_1$$

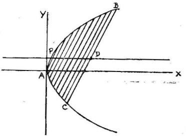
$$S \equiv y^2 - 4ax$$

$$S_1 = y_1^2 - 4ax_1$$

$T = yy_1 - 2a(x+x_1)$ எனில்,

நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$ என்றாகும்.

6·30. பரவளைவின் இணை நாண்களின் (Parallel chords) நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி பரவளைவு அச்சுக்கு இணை யாகச் செல்லும் நேர்க்கோடாகும்.



படம் 57

கோடுகள் அனைத்தும் ஒன்றுக்கொன்று இணையாதலின் அவைகள் x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் சமமாகும். எனவே, சரிவுகள் சமமாகும்.

சரிவு m எனில், இணை கோடுகளில் யாதேனும் ஒன்றின் சமன்பாடு,

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

BC என்ற இணை கோட்டின் நடுப் புள்ளி $D(x_1, y_1)$ எனில்,

BC நாணின் சமன்பாடு, $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$

(அ - து) $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

$\therefore$ BC-யின் சரிவு $= \dfrac{2a}{y_1}$

BC கோடு, $y = mx + c$ கோட்டிற்கு இணையாதலின்,

$$m = \frac{2a}{y_1}$$

(அ - து) $\quad y_1 = \dfrac{2a}{m}.$

எனவே, $D(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$y = \frac{2a}{m}.$$

இது x ஆயத்திற்கு இணையான ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

எனவே, இணை நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி பரவளைவின் அச்சுக்கு (x ஆயம்) இணையாக உள்ள ஒரு நேர்க் கோடாகும்.

மேலும், D-யின் இயங்கு வழி பரவளைவை P புள்ளியில் வெட்டினால், P புள்ளியின் y ஆயத் தொலை $\dfrac{2a}{m}$.

∴ P-யின் ஆயத் தொலைகள்,

$$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right).$$

$$\left[\because \quad x = \frac{y^2}{4a} = \frac{4a^2}{m^2 4a} = \frac{a}{m^2}\right]$$

பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$y.\frac{2a}{m} = 2a\left(x + \frac{a}{m^2}\right)$$

(அ - து) $y = mx + \frac{a}{m}$.

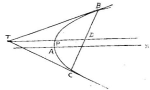
இதன் சரிவு m ஆதலின், P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு இணை நாண்களுக்கு இணையாக உள்ள நேர்க்கோடாகும்.

6·31. பரவளைவின் விட்டம் (Diameter) வரையறை.

பரவளைவின் இணை நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி பரவளைவின் விட்டம் எனப்படும். படம் 57-இல் PD பரவளைவின் விட்டமாகும். இது x ஆயத்திற்கு (பரவளைவு அச்சு) இணையாக இருக்கும். பரவளைவின் விட்டங்கள் யாவும் அதன் அச்சுக்கு இணையாக இருக்கும்.

6·32. பரவளைவு நாணின் நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள், அந்நாணை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் பரவளைவு விட்டத்தின் மேல் தம்முள் வெட்டும்

நாண் BC-யின் நடுப்புள்ளி D எனக் கொள்வோம். பரவளைவு அச்சுக்கு இணையாக D வழி வரையும் கோடு பரவளைவை P புள்ளியில் வெட்டட்டும்.



படம் 58

B, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்வோம்.

PD கோட்டின் சமன்பாடு $y = \dfrac{2at_1+2at_2}{2} = a(t_1+t_2)$

(அ-து) $y = a(t_1+t_2)$

B, C புள்ளிகளிடத்துப் பரவளைவு $y^2=4ax$-க்கு வரையும் தொடுகோடுகள்

$$yt_1 = x + at_1^2$$
$$yt_2 = x + at_2^2.$$

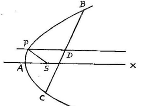
இவைகள் வெட்டும் புள்ளி, $T[at_1t_2, a(t_1+t_2)]$

எனவே, T புள்ளி BC நாணை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் பரவளைவு விட்டம் PD-யின் மேல் அமைந்துள்ளது.

6·33. BC நாணைப் பரவளைவின் விட்டம் நடுப்புள்ளி D-யில் வெட்டுகிறது. அவ்விட்டம் பரவளைவை P புள்ளியில் வெட்டினால் $BD^2 = 4SP.PD$

B, C புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ D புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\dfrac{a}{2}(t_1^2+t_2^2), a(t_1+t_2)\right]$.



படம் 59.

$$BD^2 = [at_1^2 - \frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2)]^2 + [2at_1 - a(t_1+t_2)]^2$$
$$= \left[\frac{a}{2}(t_1^2-t_2^2)\right]^2 + [a(t_1-t_2)]^2$$

$$= \frac{a^2}{4}(t_1+t_2)^2(t_1-t_2)^2 + a^2(t_1-t_2)^2$$

$$= \frac{a^2}{4}(t_1-t_2)^2\,[(t_1+t_2)^2+4]$$

P-யின் y ஆயத்தொலை = D-யின் y ஆயத்தொலை

$$= a(t_1+t_2).$$

∴ P-யின் ஆயத்தொலைகள்,

$$\left[\frac{a}{4}(t_1+t_2)^2,\ a(t_1+t_2)\right]$$

$$\left[\because\ x = \frac{y^2}{4a} = \frac{1}{4a}.\,a^2(t_1+t_2)^2 = \frac{a(t_1+t^2)^2}{4}\right]$$

பின், $SP^2 = \left\{a - \frac{a}{4}(t_1+t_2)^2\right\}^2 + \left\{-a(t_1+t_2)\right\}^2$

$$= \frac{1}{16}\left\{4a - a(t_1+t_2)^2\right\}^2 + a^2(t_1+t_2)^2$$

$$= \frac{1}{16}\left[\left\{4a - a(t_1+t_2)^2\right\}^2 + 16a^2(t_1+t_2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}a^2\left[\left\{4-(t_1+t_2)^2\right\}^2 + 16(t_1+t_2)^2\right]$$

$$= \frac{1}{16}a^2[16 + (t_1+t_2)^4 - 8(t_1+t_2)^2 + 16(t_1+t_2)^2]$$

$$= \frac{1}{16}a^2[(t_1+t_2)^4 + 8(t_1+t_2)^2 + 16]$$

$$= \frac{1}{16}a^2[(t_1+t_2)^2+4]^2$$

$$\therefore\ SP = \frac{1}{4}a[(t_1+t_2)^2+4].$$

PD = (D-யின் x ஆயத் தொலை)−(P-யின் x ஆயத்தொலை)

$$= \frac{a}{2}(t_1^2+t_2^2) - \frac{a}{4}(t_1+t_2)2$$

$$= \frac{a}{4}\,[2t_1^2 + 2t_2^2 - t_1^2 - t_2^2 - 2t_1t_2]$$

$$= \frac{a}{4}\,[t_1^2 + t_2^2 - 2t_1t_2]$$

$$= \frac{a}{4}\,(t_1 - t_2)^2.$$

$$4SP.PD = 4\left[\frac{a}{4}\left\{(t_1 + t_2)^2 + 4\right\}\right].\frac{a}{4}(t_1 - t_2)$$

$$= \frac{a^2}{4}(t_1 - t_2)^2\,[(t_1 + t_2)^2 + 4].$$

$$= BD^2.$$

மாதிரி 18 : ஒரு பரவளைவின் குவிய நாண்கள்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி, முதல் பரவளைவின் குவியத்தை முனை யாகக் கொண்ட மற்றொரு பரவளைவு என நிறுவுக.

$$y^2 = 4ax \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற பரவளைவின் ஒரு நாணின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனில் அந் நாணின் சமன்பாடு,

$$yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1.$$

இது குவியம் $S(a, 0)$ வழிச் செல்கிறது.

$$\therefore \quad -2a(x_1 + a) = y_1^2 - 4ax_1$$

(அ-து) $y_1^2 - 2ax_1 + 2a^2 = 0$

(அ-து) $y_1^2 - 2a(x_1 - a) = 0.$

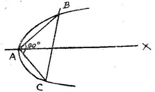
எனவே, (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி,

$y^2 - 2a(x - a) = 0$ ஆகும்.

இஃது ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும். இப் பரவளைவின் முனை $(a, 0)$.

(அ – து) பரவளைவு (1)-இன் குவியமாகும்.

மாதிரி 19 : பரவளைவின் முனையில் நேர்க்கோணத்தை ஏற்கும் நாண்களின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 60.

பரவளைவு $y^2 = 4ax$ ... . (1)

எனவும், முனை A-யில் நேர்க்கோணத்தை ஏற்கும் பரவளைவின் நாண் BC என்றும் கொள்க.

இதன் மையப் புள்ளி, (x_1, y_1) எனில்,

BC கோட்டின் சமன்பாடு, $T = S_1$

(அ - து) $yy_1 - 2a(x + x_1) = y_1^2 - 4ax_1$

(அ - து) $yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1$ ... ... (2)

A ஆதியாதலின் AB, AC என்ற கோடுகளின் இணைந்த சமன்பாடு, பரவளைவின் சமன்பாடு (1)-ஐ (2)-இனுல் சமபடித்தான சமன்பாடாக்குவதன் மூலம் கிடைக்கப் பெறலாம்.

(அ - து) AB, AC என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு

$$y^2 - 4ax.\left\{\frac{yy_1 - 2ax}{y_1^2 - 2ax_1}\right\} = 0$$

(அ - து) $y^2(y_1^2 - 2ax_1) - 4ax(yy_1 - 2ax) = 0$ ... (3)

CA, CB கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாதலின் சமன்பாடு (3)-இல்,

$$x^2\text{-இன் கெழு} + y^2\text{-இன் கெழு} = 0$$

(அ - து) $(8a^2) + (y_1^2 - 2ax_1) = 0.$

எனவே, நடுப் புள்ளி $(x_1 y_1)$-இன் இயங்கு வழி,

$$y^2 = 2ax - 8a^2$$

(அ - து) $y^2 = 2a(x-4a).$

பயிற்சி 6.2.

1. $y^2 = 4x$ பரவளையைச் சார்ந்த (1, 7), (4, 8) புள்ளிகளின் இசைக் கோடுகள் காண்க. இவைகள் வெட்டும் புள்ளியின் இசைக் கோடு கொடுத்துள்ள புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடென நிறுவுக.

2. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக் கோடு, $y^2 = 4ax$ பரவளையின் தொடுகோடெனில் P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

3. பரவளைவு $y^2 = 4ax$-இன் முனையில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் நாணின் இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

4. பரவளையின் குவிய நாண்கள்தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி அதன் இயக்கு வரை என நிறுவுக.

5. பரவளைவில் முனையிடத்துத் தொடு கோட்டின் மீதுள்ள புள்ளிகளிலிருந்து, அப் புள்ளிகளின் பரவளைவைச் சார்ந்த இசைக் கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் அடிப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி ஒரு வட்டம் என நிறுவுக. அவ் வட்டத்தின் மையம், ஆரம் காண்க.

6. ஒரு புள்ளியிலிருந்து பரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் ஆயங்களுடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் நிரப்புக்கோணங்களெனின் அத் தொடு கோடுகளின் தொடுநாண் நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

7. $x^2 + y^2 - 2x - 4 = 0$ வட்டத்தைத் தொடும் $y^2 = 2x$ பரவளையின் நாணின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

8. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

9. பரவளைவு $y^2 = 4ax$-இன் முனையிடத்துச்செங் கோணத்தை ஏற்கும் நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $y^2 = 2a(x - 4a)$ என நிறுவுக.

10. $y^2+4bx=0$ பரவளைவுத் தொடுகோடு ஒன்று $y^2 = 4ax$ பரவளைவை B, C-யில் வெட்டினால், BC-யின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி $y^2(2a+b) = 4a^2x$ என நிறுவுக.

11. இரு தொடுகோடுகள் ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலி எனில், அத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி ஒரு நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

12. $x^2 + y^2 = c^2$ வட்டத் தொடுகோடுகளின் $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி $4a^2(x^2-c^2) = c^2y^2$ என நிறுவுக.

13. $y^2=4ax$ பரவளைவில் $2k$ நீளமுள்ள நாண்கள்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(y^2+4a^2)(4ax-y^2) = 4a^2k^2$ என நிறுவுக,

14. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ வட்டத் தொடு கோடு $y^2 = 4ax$ பரவளைவை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டு கிறதெனின், P, Q-வின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

15. P-இலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் இரட் டைத் தொடுகோடுகள் முனையிடத்துத் தொடுகோட் டுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு k^2 எனில், P-யின் இயங்கு வழி $x^2(y^2-4ax) = 4k^4$ என நிறுவுக.

16. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்கள்தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(x + 2a)y^2 + 4a^3 = 0$ என நிறுவுக.

17. P புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$-ஐச் சார்ந்த அதன் இசைக் கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடு $x^2 = 4by$ பரவளைவின் தொடுகோடெனில் P-யின் இயங்கு வழி $2ax + by + 4a^2 = 0$ என நிறுவுக.

18. $y^2 = 4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகளின் $x^2 = 4by$ பரவளைவைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $ay^2 = 4b^2x$ என நிறுவுக.

19. இயக்கு வரையிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி $y^2(a+2x) = a(a+3x)^2$ என நிறுவுக.

20. நிலைத்தபுள்ளி ஒன்றின் வழிச் செல்லும் பரவளைவு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி மற்றொரு பரவளைவு என நிறுவுக.

21. $x = at+bt^2$; $y = ct+dt^2$ சமன்பாடுகள் ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும் எனக்காட்டுக. இப்பரவளைவின் துணையலகு t_1, t_2 புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு,

$$\begin{vmatrix} x & y & t_1t_2 \\ a & c & t_1+t_2 \\ b & d & -1 \end{vmatrix} = 0$$

என நிறுவுக.

22. $y^2 = 4ax$ பரவளைவில் 't' புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டு நாணின் நீளம் $\dfrac{4a(1+t^2)^{\frac{3}{2}}}{t^2}$ என நிறுவுக.

23. ($6a$, 0 புள்ளியிலிருந்து $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு வரையும் மூன்று செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளைக் காண்க.

24. $x^2+y^2-2ax+c=0$, $x^2+y^2+2bx+c=0$ வட்டங்கள் ஒரு கோட்டின்மீது சமநீளமுள்ள வெட்டுத்துண்டுகளை ஏற்குமெனில், அக்கோடு $y^2 = 2(a-b)x$ பரவளைவின் தொடுகோடென நிறுவுக.

25. $y^2 = 4ax$ பரவளைவுக்கு P புள்ளியிலிருந்து வரையும் மூன்று செங்கோடுகளில் இரண்டு தம்முள் செங்குத்தெனில், P புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

விடைகள்

1. $2x - 7y + 2 = 0$; $x - 4y + 4 = 0$; $(20, 6)$.
2. $x + 4a = 0$. 5. $(a, 0)$, a. 7. $(y^2 - x + 1)^2 = 5(y^2 + 1)$.
8. $\frac{y^2}{2a} + \frac{4a^3}{y^2} = x - 2a$. 23. $(0, 0)$, $(4a, 4a)$; $(4a, -4a)$.
25. $y^2 = a(x - 3a)$.

7. நீள் வட்டம்

(Ellipse)

7·1. நீள் வட்டம்—வரையறை

ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத்தொலை விகிதம் $e < 1$ எனில், அது நீள்வட்டம் எனப்படும்.

7·2. நீள் வட்டம்—சமன்பாடு

குவியம் $S(\alpha, \beta)$ எனவும், இயக்கு வரை $lx + my + n = 0$ எனவும் கொள்வோம். நீள் வட்டத்தின் மீது $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

குவியத்திலிருந்து P-யிக்கு உள்ள தூரம்,

$$SP = \sqrt{(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2}$$

$lx + my + n = 0$ கோட்டிலிருந்து P-க்கு உள்ள தூரம்,

$$PM = \frac{lx_1 + my_1 + n}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}.$$

வரையறையின் படி,

$$\frac{SP}{PM} = e. (< 1)$$

(அ-து) $SP^2 = e^2 . PM^2$

$$\therefore \quad (x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2 = e^2\left[\frac{lx_1 + my_1 + n}{\pm\sqrt{l^2 + m^2}}\right]^2$$

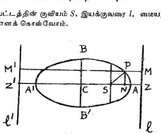
(அ-து) $(l^2 + m^2)[(x_1-\alpha)^2 + (y_1-\beta)^2]$
$$= e^2(lx_1 + my_1 + n)^2.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி (அ - து) நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = e^2 \frac{(lx+my+n)^2}{l^2+m^2}$$

7·3. நீள் வட்டம் சமன்பாட்டின் நியம வடிவம்

நீள் வட்டத்தின் குவியம் S, இயக்குவரை l, மையத் தொலை விகிதம் e எனக் கொள்வோம்.



படம் 61

S புள்ளியிலிருந்து இயக்குவரை l-க்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும். - SZ-ஐ $e : 1$ விகிதத்தில் உள்ளும் புறமும் A, A' புள்ளிகள் பிரிக்கின்றன எனக் கொள்வோம்.

AA'-ஐ C புள்ளியில் இரு சமமாகப் பிரிக்கவும். $AA'=2a$ எனின், $AC=CA'=a$,

வரையறையின்படி A, A' புள்ளிகள் நீள் வட்டத்தின் மேலமையும்.

$$\text{மேலும்,}\quad \frac{SA}{AZ}=e,\ \frac{SA'}{A'Z}=e.$$

$$\therefore\ SA = e.AZ \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$SA' = e.A'Z \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$SA+SA' = e(AZ+A'Z)$$

(அ - து) $AA' = e(CZ-CA+CA'+CZ)$

$\therefore \quad 2a = e.2CZ. \quad (\because \; CA = CA')$

$$\therefore \quad CZ = \frac{a}{e} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

மேலும், (2)-இலிருந்து (1)-ஐக் கழிப்பின்,

$$SA' - SA = e\,(A'Z - AZ)$$

(அ - து) $(A'S + CS) - (CA - CS) = e.AA'$

$\therefore \quad 2CS = e.2a$

(அ - து) $CS = ae \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

C-ஐ ஆதியாகவும், CA கோட்டை x ஆயமாகவும் கொள்வோம். CA-க்குச் செங்குத்தாக C-யிலிருந்து வரையும் CB கோட்டை y ஆயமாகக் கொள்வோம்.

எனவே, C-யின் ஆயத்தொலைகள் $(0, 0)$

S-இன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$

இயக்குவரை l-இன் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$.

$P\,(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்தின் மீதமைந்துள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின், வரையறையின்படி,

$$\frac{SP}{PM} = e\,(<)$$

(அ - து) $SP^2 = e^2.PM^2$.

$$SP^2 = (x_1 - ae)^2 + y_1^2$$

$$PM^2 = \left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2$$

$$\left[\because PM = NZ = CZ - CN = \left(\frac{a}{e} - x_1\right)\right]$$

$$\therefore \quad (x_1 - ae)^2 + y_1^2 = e^2\left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2$$

(அ - து) $x_1^2+y_1^2-2x_1ae+a^2e^2$

$$=e^2\left[x_1^2-2x_1\frac{a}{e}+\frac{a^2}{e^2}\right]$$

$$=e^2x_1^2-2x_1ae+a^2.$$

எனவே, $x_1^2(1-e^2)+y_1^2=a^2(1-e^2)$.

இரு பக்கமும் $a^2(1-e^2)$-ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி (அ-து) நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2(1-e^2)}=1.$$

$b^2=a^2(1-e^2)$ எனப் பிரதியிடின்

சமன்பாடு, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற வடிவம் பெறும்.

7·4. நீள் வட்டத்தின் தன்மைகள்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \text{நீள் வட்டம்.}$$

(i) சமன்பாடு x, y ஆயங்களுடன் சமச் சீருடையதாயிருப்பதால் (x, y) புள்ளி நீள் வட்டத்திலிருப்பின், $(-x, -y)$, $(x, -y)$, $(-x, y)$ புள்ளிகளும் நீள்வட்டத்திலிருக்கும்.

(ii) (x, y), $(-x, -y)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு ஆதி (C) வழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் அனைத்து நாண்களையும் C சமமாகப் பிரிக்கும். C புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மையம் எனப்படும்,

(iii) x ஆயத்தை நீள் வட்டம் $(\pm a, 0)$ புள்ளிகளிலும், y ஆயத்தை $(0, \pm b)$ புள்ளிகளிலும் வெட்டும். x ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் A, A' எனவும், y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகள் B, B' எனவும் குறிப்பிடப்படுகின்றன. A, A' நீள் வட்டத்தின் முனைகளாகும். நீள் வட்டம் A, A'; B, B' புள்ளிகள் வழிச் செல்கிறது.

(iv) $x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2}$.

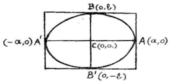
$\therefore$ $y > b$, $y < -b$ எனில், x கற்பனை மதிப்புடையது.

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

$\therefore$ $x > a$, $x < -a$ எனில், y கற்பனை மதிப்புடையது.

எனவே, நீள் வட்டம் $x = \pm a$, $y = \pm b$ என்ற நீண்ட சதுரத்தினுள் அமையும்.

(v) x-இன் மதிப்புப் பூச்சியத்திலிருந்து a வரை அதிகரிக்கும் போது, y-யின் மதிப்பு b-யிலிருந்து பூச்சியத்திற்குக் குறையும்.



படம் 62.

7·5. இரண்டாவது குவியம், இயக்கு வரை

பத்தி 7·3-இல் உள்ள படம் 61-இல் CA' கோட்டின் மீது S', Z' புள்ளிகளை $CS = CS'$, $CZ = CZ'$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

CZ' கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக Z' புள்ளி வழி $Z'M'$ கோடு வரையவும். $Z'M'$-க்குச் செங்குத்தாக P-யிலிருந்து $P'M'$ கோடு வரையவும்.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(அ - து) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1-e^2)} = 1$

(அ-து) $(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2)$.

(அ-து) $x^2 + y^2 + a^2e^2 = a^2 + x^2e^2$

இரு பக்கமும் $2xae$-ஐக் கூட்டினால்,

$$x^2 + 2xae + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + 2aex + a^2.$$

$$(x + ae)^2 + y^2 = e^2\left[x + \frac{a}{e}\right]^2 \quad \ldots \quad (1)$$

$P(x, y)$ என்பது நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில், சமன்பாடு (1)

$$S'P^2 = e^2.PM'^2 \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து) $S'P = e.PM'$

(அ-து) நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள P புள்ளிக்கு S' புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம், $Z'M'$ கோட்டிலிருந்து P-யின் தூரத்தின் e மடங்காகும்.

$e < 1$ எனில், இது நீள் வட்டத்தின் வரையறையாம். எனவே, S', $Z'M'$ என்பவை முறையே நீள் வட்டத்தின் இரண்டாவது குவியம், இரண்டாவது இயக்குவரை யாகும். எனவே, நீள் வட்டம் இரண்டு குவியங்கள், இரண்டு இயக்கு வரைகள் கொண்டிருக்கும்.

இரண்டாவது குவியத்தின் ஆயத் தொலைகள் $S'(-ae, 0)$

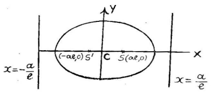
இரண்டாவது இயக்குவரையின் சமன்பாடு $x = -\frac{a}{e}$.

7·6. நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

(i) $a > b$ எனில், மையத் தொலை விகிதம் e, $b^2 = a^2(1-e^2)$ சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும். $2a$, $2b$ என்பவை முறையே நீள் வட்டத்தின் பேரச்சு (major axis), சிற்றச்சு (minor axis) எனப்படும்.

நீள் வட்டத்தின் குவியங்கள் $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$.

இயக்குவரைகள் $x - \frac{a}{e} = 0; \; x + \frac{a}{e} = 0.$

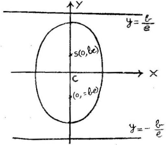


படம் 63.

(ii) $b > a$ எனில், மையத் தொலை விகிதம் e, $a^2 = b^2(1-e^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படும். பேரச்சு y ஆயத்தின் மீதும், சிற்றச்சு x ஆயத்தின் மீதும் அமையும். பேரச்சு நீளம் $2b$, சிற்றச்சு நீளம் $2a$.

குவியங்களின் ஆயத் தொலைகள் $(0, be), (0, -be)$

இயக்குவரைகள் $y - \frac{b}{e} = 0; \; y + \frac{b}{e} = 0.$



படம் 64.

7·7. செவ்வகலம் (Latus Rectum)

குவியம் S வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையும் கோடு நீள் வட்டத்தை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினால், LSL' எனும் நாண் நீள் வட்டத்தின் செவ்வகலம் எனப்படும்.

L-இன் x ஆயத்தொலை $= S$-இன் x ஆயத்தொலை $= ae$. L-இன் y ஆயத்தொலை SL எனின்,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{நீள் வட்டத்தில்}$$

$$\frac{a^2e^2}{a^2} + \frac{SL^2}{b^2} = 1$$

(அ - து) $SL^2 = b^2(1-e^2)$

$$= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad [\because \; b^2 = a^2(1-e^2)]$$

$$= \frac{b^4}{a^2}$$

$$\therefore \; SL = +\frac{b^2}{a}.$$

எனவே, செவ்வகலத்தின் நீளம்

$$LSL' = LS + SL' = \frac{b^2}{a} + \frac{b^2}{a} = \frac{2b^2}{a}.$$

பேரச்சு $2b$, சிற்றச்சு $2a$ எனின்,

$$\text{செவ்வகலத்தின் நீளம்} = \frac{2a^2}{b}$$

7·8. நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் குவிய தூரங்களின் (focal distances) கூட்டுத்தொகை பேரச்சின் நீளத்திற்குச் சமம்

$P(x, y)$ நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்க.

குவியங்கள் $S(ae, 0)$, $S'(-ae, 0)$.

[பத்தி 7·3-இல் உள்ள படம் 61-ஐக் காண்க].

வரையறையின்படி $SP = e.PM$, $S'P = e.PM'$

$$\therefore \quad SP = e.PM = e(NZ) = e(CZ - CN) = e\left(\frac{a}{e} - x\right) = a - ex$$

$$S'P = e.PM' = e(NZ') = e(CZ' + CN) = e\left(\frac{a}{e} + x\right) = a + ex$$

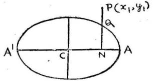
$$\therefore \quad SP + S'P = (a - ex) + (a + ex) = 2a.$$

$$= \text{பேரச்சின் நீளம்.}$$

எனவே, நீள் வட்டத்தைப் பின் வருமாறு வரையறுக்கலாம்.

இரு நிலைத்த புள்ளிகளிலிருந்து P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் தூரங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியெனின், அப் புள்ளியின் இயங்கு வழி நீள் வட்டமாகும்.

7·9. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை



படம் 65.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை யறிய, அப் புள்ளியிலிருந்து பேரச்சுக்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும். இது நீள் வட்டத்தை Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$NP > NQ$ எனின்,

P புள்ளி நீள் வட்டத்தின் வெளியே இருக்கும்.

$$NP = y_1, \quad NQ = b\sqrt{1 - \frac{x_1^2}{a^2}}.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்திற்கு வெளியே இருப்பின்,

$$y_1^2 > b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$$

(அ - து) $\frac{y_1^2}{b^2} = > 1 - \frac{x_1^2}{a^2}$

(அ - து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} > 1.$

இவ்வாறே $P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்திற்குள்ளே இருப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1.$$

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மீது அமையுமெனின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1.$$

எனவே, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} \gtrless 1$ எனின், (x_1, y_1) நீள் வட்டத்தின் வெளியே, மேலே அல்லது உள்ளே இருக்கும்.

மாதிரி 1: ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் (1, 2), மையத் தொலை விகிதம் $\frac{2}{3}$, ஒத்த இயக்குவரை $2x-3y+6=0$ எனில், நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$P(x_1, y_1)$ நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனில்,

குவியம் $S(1, 2)$-இலிருந்து P-யின் தூரம்

$$SP = \sqrt{(x_1-1)^2 + (y_1-2)^2}$$

$2x-3y+6=0$ இயக்குவரையிலிருந்து P-யின் தூரம்

$$PM = \frac{2x_1 - 3y_1 + 6}{\pm\sqrt{2^2+3^2}}$$

மையத்தொலை விகிதம் $e = \frac{2}{3}$ ஆதலின்,

வரையறையின்படி, $\frac{SP}{PM} = e$

$\therefore \quad SP^2 = e^2 PM^2$

(அ - து) $(x_1-1)^2 + (y_1-2)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{(2x_1-3y_1+6)^2}{13}$

(அ - து) $117[x_1^2+y_1^2-2x_1-4y_1+5]$

$= 4[4x_1^2+9y_1^2+36-12x_1y_1+24x_1-36y_1]$

$\therefore \quad 101x_1^2+48x_1y_1+81y_1^2-330x_1-324y_1+441=0.$
எனவே, $F(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி (அ-து) நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$101x^2+48xy+81y^2-330x-324y+441=0.$$

மாதிரி 2 : $4x^2+9y^2+8x+36y+4=0$ நீள் வட்டத்தின் மையம், மையத் தொலை விகிதம், அச்சுக்களின் நீளங்கள், செவ்வகலம், குவியங்கள் ஆகியவற்றைக் காண்க.

$$4x^2+9y^2+8x+36y+4=0.$$

(அ - து) $4(x^2+2x)+9(y^2+4y)=-4$

$4(x^2+2x+1)+9(y^2+4y+4)=-4+4+36$

$\therefore \quad 4(x+1)^2+9(y+2)^2=36$

(அ - து) $\frac{(x+1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1.$

ஆதியை $(-1, -2)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு,

$$\frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1$$

என் ஒுகும்.

நீள் வட்டத்தின் (புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்து)

மையம் $(X=0, \; Y=0)$.

பேரச்சு நீளம் $3 \times 2 = 6$.

சிற்றச்சு நீளம் $2 \times 2 = 4$.

$$b^2 = a^2(1-e^2)$$

$$4 = 9(1-e^2)$$

$$\therefore \quad \frac{4}{9} = 1-e^2 \quad (\text{அ-து}) \quad e^2 = \frac{5}{9}$$

எனவே, மையத் தொலை விகிதம் $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

குவியம் $S\left[X = 3.\frac{\sqrt{5}}{3}, \quad Y = 0\right]$

குவியம் $S'\left[X = -\frac{3\sqrt{5}}{3}, Y = 0\right]$

செவ்வகலத்தின் நீளம்,

$$= 2.\frac{2^2}{3} = \frac{8}{3}.$$

இயக்கு வரைகள்,

$$X = \frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{5}}$$

$$X = -\frac{3}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{9}{\sqrt{5}}$$

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து

மையம் $(x+1=0,\ y+2=0)$ (அ-து) $(-1, -2)$.

பேரச்சு, சிற்றச்சு நீளம் முறையே 6, 4.

மையத் தொலை விகிதம் $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

குவியங்கள் $S[x+1 = \sqrt{5},\ y+2 = 0]$

(அ-து) $[\sqrt{5}-1, -2]$.

$S'[x+1 = -\sqrt{5},\ y+2 = 0]$

(அ-து) $[-\sqrt{5}-1, \ -2]$.

இயக்கு வரைகள்,

$$x + 1 = \frac{9}{\sqrt{5}} \quad (\text{அ-து}) \ \sqrt{5}x+(\sqrt{5}-9)=0$$

(அ-து) $5x+(5-9\sqrt{5})=0$.

$$x + 1 = -\frac{9}{\sqrt{5}} \ (\text{அ-து}) \ 5x+(5+9\sqrt{5})=0.$$

செவ்வகலத்தின் நீளம் $= \frac{8}{3}$.

7·10. $y = mx + c$ **கோடு** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **நீள் வட்டத் தொடு கோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு**

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளைத் தீர்க்க,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2\left[\frac{1}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right] + \frac{2mc}{b^2}x + \frac{c^2}{b^2} - 1 = 0$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2(a^2m^2+b^2) + 2mc\,a^2x + a^2(c^2-b^2) = 0 \ \ldots (3)$$

இது x-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், x-இன் இரு மதிப்புக்களும் (1), (2) வெட்டும் இரு புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகளை அளிக்கும்.

x-இன் இரு மதிப்புக்களும் சமமெனில், கோடு (1), நீள் வட்டம் (2)-இன் தொடுகோடாகும்.

$\therefore$ சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக்காட்டி பூச்சியம்.

$$(\text{அ-து}) \quad 4m^2c^2a^4 - 4(a^2m^2+b^2)\,a^2(c^2-b^2) = 0$$

இதைச் சுருக்கின், $\quad c^2 = a^2m^2 + b^2$

$$\therefore \quad c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.$$

(அ-து) m-இன் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும்

$$y + mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}$$

எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடு கோடாகும்.

7·11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு:

$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$ நீள் வட்டத்தின்மீது மிக அருகாமையிலுள்ள இரு புள்ளிகள் எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\frac{y_1^2 - y_2^2}{b^2} = -\frac{x_1^2 - x_2^2}{a^2}$$

(அ-து) $$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2} = -\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2}$$

$$\therefore \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2(x_1 + x_2)}{a^2(y_1 + y_2)} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

நாண் PQ-வின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-y_1}{y_1-y_2} = \frac{x-x_1}{x_1-x_2}$$

(அ-து) $$y - y_1 = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}(x-x_1)$$

சமன்பாடு, (3)-ஐ இதில் பிரதியிடின், நாணின் சமன்பாடு,

$$y - y_1 = -\frac{b^2(x_1+x_2)}{a^2(y_1+y_2)}(x-x_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

என்றாகும்.

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளி $P(x_1, y_1)$ புள்ளியுடன் நெருங்கி, முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும்போது PQ என்ற நாண் $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

∴ சமன்பாடு (4)-இல், $x_2 = x_1$, $y_2 = y_1$ எனப் பிரதியிடின், P யிடத்துத் தொடுகோடு,

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1)$$

(அ-து) $$\frac{yy_1 - y_1^2}{b^2} = -\frac{xx_1 - x_1^2}{a^2}$$

(அ-து) $$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

$$= 1 \quad \text{[சமன்பாடு (1)]}$$

∴ $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

7·12. $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ **தொடுகோடு** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **நீள் வட்டத்தைத் தொடும் புள்ளி**

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கோடு (1), நீள் வட்டம் (2)-ஐத் தொடும் புள்ளி (x_1, y_1) எனின், அப்புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{y_1}{b^2} = -\frac{x_1}{a^2m} = \frac{1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}$$

$$\therefore \quad x_1 = \frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}, \quad y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}.$$

எனவே, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ தொடு கோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐத் தொடும் புள்ளி, $\left[\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}},\ \frac{+b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}\right]$.

7·13. குறித்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்திற்கு இரு தொடு கோடுகள் வரையக் கூடும்

குறித்த புள்ளி (x_1, y_1) எனவும்,

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும் கொள்வோம்.

நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடு,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$$

$$\therefore \quad (y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2.$$

(அ - து) $m^2(x_1{}^2 - a^2) - 2x_1y_1m + (y_1{}^2 - b^2) = 0 \ldots (2)$

இது m-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், m-இன் இரு மதிப்புக்கள் m_1, m_2 எனக் கொள்வோம்.

இவைகளை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$y = m_1x + \sqrt{a^2m_1{}^2 + b^2},$$

$$y = m_2x + \sqrt{a^2m_2{}^2 + b^2},$$

என்ற இரு தொடுகோடுகள் கிடைக்கப் பெறும்.

எனவே, (x_1, y_1) என்ற குறித்த புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு இரு தொடுகோடுகள் வரையக் கூடும்.

7·14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0.$$

இதன் சரிவு $= -\dfrac{\frac{x_1}{a^2}}{\frac{y_1}{b^2}}$

எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு,

$$\frac{a^2y_1}{b^2x_1} \qquad [\because \; m_1m_2 = -1].$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y-y_1 = \frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1)$$

(அ-து) $b^2x_1y-b^2x_1y_1 = a^2xy_1-a^2x_1y_1$

$$\therefore \; a^2xy_1-b^2yx_1 = (a^2-b^2)\,x_1y_1$$

$$\frac{a^2x}{x^2} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2-b^2.$$

எனவே, $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் (x_1, y_1)

புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2-b^2.$$

மாதிரி 3: $3x^2+7y^2 = 115$ நீள் வட்டத்தின் (1, 4) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, செங்கோடு காண்க.

$$\frac{x^2}{\frac{115}{3}} + \frac{y^2}{\frac{115}{7}} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

(1, 4) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{x.1}{\frac{115}{3}} + \frac{y.4}{\frac{115}{7}} = 1$$

(அ-து) $3x+28y=115$

செங்கோட்டின் சமன்பாடு $28x-8y=k$.

இது $(1, 4)$ வழிச் செல்லின் $28-12=k$

$\therefore \quad k=16$

எனவே, $(1, 4)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$2 \cdot 8x-8y-16=0.$$

மாதிரி 4 : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் இரு தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக P புள்ளியில் வெட்டினால், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரு தொடுகோடுகள் தம்முள் $P(x_1, y_1)$-இல் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

நீள் வட்டத்திற்கு வரையப்படும் தொடுகோடுகளின் சரிவுகள் m_1, m_2 எனில், அவைகள் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும். [பத்தி 7·13].

$$m^2(x_1^2-a^2)-2x_1y_1m+(y_1^2-b^2)=0.$$

$\therefore \quad m_1m_2=$ தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை $=\frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}$.

தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனில், $m_1m_2=-1$.

$$\therefore \quad \frac{y_1^2-b^2}{x_1^2-a^2}=-1$$

(அ-து) $\quad x_1^2-a^2+y_1^2-b^2=0$

(அ-து) $\quad x_1^2+y_1^2=a^2+b^2$.

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$x^2+y^2=a^2+b^2.$$

இஃது ஒரு வட்டமாகும். இதன் மையம் $(0, 0)$; ஆரம் $=\sqrt{a_2+b^2}$. இவ்வட்டம் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் (director circle) எனப்படும்.

குறிப்பு : பரவளையின் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் அதன் இயக்கு வரையாகும்.

மாதிரி 5 : $lx+my+n=0$ கோடு, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடெனில், தொடு புள்ளியைக் காண்க.

தொடு புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$(x_1 y_1)$ புள்ளிடத்துத்தொடுகோடு,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

கொடுத்துள்ள கோடு $lx+my+n=0$ ... ... (2)

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கு மாதலின்,

$$\frac{x_1}{la^2}=\frac{y_1}{mb^2}=\frac{1}{-n}.$$

(அ-து) $x_1=-\frac{a^2l}{n},\ y_1=-\frac{b^2m}{n}.$

$\therefore$ தொடுபுள்ளி, $\left(\frac{-a^2l}{n},\ \frac{-b^2m}{n}\right).$

மாதிரி 5 (a) : $lx+my+n=0$ கோடு, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப் பாடு யாது ?

$$lx+my+n=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(1)-இலிருந்து $y=-\frac{l}{m}x-\frac{n}{m}.$

∴ பத்தி 7·10-இன்படி தேவையான கட்டுப்பாடு,

$$\left(-\frac{n}{m}\right)^2 = a^2\left(-\frac{l}{m}\right)^2 + b^2$$

$$[\because \; c^2 = a^2m^2 + b^2]$$

(அ-து) $n^2 = a^2l^2 + b^2m^2$.

மாதிரி 6 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடு களுக்கு, அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடு கள்தம் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

தொடுகோடு, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ ... (1)

(1)-க்குச் செங்குத்தாக மையம் (ஆதி) வழிச்செல்லும் கோடு,

$$y = -\frac{1}{m}x \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

மையத்திலிருந்து தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி, (x_1, y_1) எனின், அப் புள்ளி சமன்பாடு கள் (1), (2)-இல் பொருந்தும்.

$$\therefore \; y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$y_1 = -\frac{1}{m}x_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இச் சமன்பாடுகளில் m-ஐ நீக்கின் (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்.

(4)-இலிருந்து $m = -\frac{x_1}{y_1}$.

இதை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$y_1 = -\frac{x_1}{y_1}x_1 + \sqrt{a_2\frac{x_1^2}{y_1^2} + b^2}$$

(அ-து) $y_1^2 + x_1^2 = \sqrt{a^2x_1^2 + b^2y_1^2}$

$$\therefore \; (x_1^2 + y_1^2)^2 = a_2x_1^2 + b^2y_1^2.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$(x^2+y^2)^2 = a^2x^2+b^2y^2.$$

மாதிரி 7 : $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் குவியங்களிலிருந்து அதன் தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் பெருக்குத் தொகை b^2 எனவும், இச் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள்தம் இயங்குவழி $x^2+y^2=a^2$ எனவும் நிறுவுக.

தொடுகோடு, $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ ... ... (1)

$p_1=S(ae, 0)$-த்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$= \frac{-mae-\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}$$

$p_2=S'(-ae, 0)$-த்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் $= \frac{mae-\sqrt{a^2m^2+b^2}}{\sqrt{1+m^2}}.$

$$p_1p_2 = \frac{-(mae+\sqrt{a^2m^2+b^2})}{\sqrt{1+m^2}}\cdot\frac{(mae-\sqrt{a^2m^2+b^2})}{\sqrt{1+m^2}}$$

$$= \frac{-(m^2a^2e^2-a^2m^2-b^2)}{1+m^2}$$

$$= \frac{a^2m^2(1-e^2)+b^2}{1+m^2}$$

$$= \frac{m^2b^2+b^2}{1+m^2} = \frac{b^2(1+m^2)}{1+m^2} = b^2.$$

∴ செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத்தொகை b^2.

மேலும், (1)-க்குச் செங்குத்தாக $S(ae, 0)$ வழிச் செல்லும் கோடு,

$$y = -\frac{1}{m}(x-ae),$$

(அ-து) $x+my=ae$ ... ... (3)

தொடுகோடு (1)-ம், அதற்குச் செங்குத்தாக $S(ae, 0)$-த்திலிருந்து வரையும் கோடு (2)-ம் தம்முள் (x_1, y_1) புள்ளியில் வெட்டினால்,

$$y_1 = mx_1 + \sqrt{a^2m^2 + b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$x_1 + my_1 = ae \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இலிருந்து (x_1, y_1)-ஐ நீக்கின் (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி கிடைக்கப் பெறும்.

சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐ வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$(y_1 - mx_1)^2 + (x_1 + my_1)^2 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2.$$

$$y_1^2 + m^2x_1^2 - 2mx_1y_1 + x_1^2 + m^2y_1^2 + 2mx_1y_1 = a^2m^2 + b^2 + a^2e^2,$$

(அ-து) $(x_1^2 + y_1^2) + m^2(x_1^2 + y_1^2) = a^2m^2 + a^2(1 - e^2) + a^2e^2.$

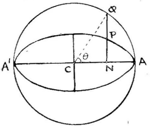
(அ-து) $(x_1^2 + y_1^2)(1 + m^2) = a^2(1 + m^2).$

$$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 = a^2.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

7·15. துணை வட்டம் (Auxilary Circle), துணை வட்டக் கோணம் (Eccentric Angle)



படம் 66.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-இன் பேரச்சை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் அதன் துணை வட்டம் (auxilary circle) எனப் படும்.

நீள் வட்டத்தின் மீது யாதேனும் ஒரு புள்ளி P எனின், P-யின் குத்தாயமான (ordinate) NP-ஐ நீட்ட, அது துணை வட்டத்தை Q-வில் வெட்டுகிறது. $\angle QCN=\theta$ எனின், கோணம் θ, P புள்ளியின் துணைவட்டக் கோணம் (eccentric angle) எனப்படும். P, Q புள்ளிகள் ஒத்த புள்ளிகள் (corresponding points) எனப்படு கின்றன.

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $[CN,\ NQ]$

(அ-து) $[a\cos\theta,\ a\sin\theta]$.

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $[CN,\ NP]$.

இப்புள்ளி $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-இன் மீதுள்ளதால்

$$\frac{CN^2}{a^2}+\frac{NP^2}{b^2}=1$$

(அ-து) $$NP^2=b^2\left[1-\frac{a^2\cos^2\theta}{a^2}\right]$$

$$=b^2\sin^2\theta.$$

$$\therefore\quad NP=\pm b\sin\theta$$

எனவே, P-யின் ஆயத்தொலைகள் $[a\cos\theta,\ b\sin\theta]$,

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ மீதமையும் எந்த ஒரு புள்ளியும் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ வடிவில் ஆயத்தொலைகள் கொண்டிருக்கும். எனவே, இதை நீள் வட்டத்தின் துணை அலகாகக் கொள்ளலாம். சுருக்கமாக, இப்புள்ளி θ எனப்படும்.

7·16. நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள θ,ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

இதன் மீதுள்ள $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்,

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$

$\therefore$ நாண் PQ-வின் சமன்பாடு,

$$\frac{y-b\sin\theta}{b\sin\theta-b\sin\phi}=\frac{x-a\cos\theta}{a\cos\theta-a\cos\phi}$$

(அ-து) $y-b\sin\theta=\dfrac{b(\sin\theta-\sin\phi)}{a(\cos\theta-\cos\phi)}(x-a\cos\theta)$

$$=\frac{b.\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}\sin\dfrac{\theta-\phi}{2}}{-a\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}\sin\dfrac{\theta-\phi}{2}}(x-a\cos\theta)$$

(அ-து) $(y-b\sin\theta)\,a\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}$

$$=-(x-a\cos\theta)\,b\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

(அ-து) $bx\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}+ay\sin\dfrac{\theta+\phi}{2}$

$$=ab\left[\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}+\cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2}\right]$$

$$=ab\cos\left(\theta-\frac{\theta+\phi}{2}\right)$$

$$=ab\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

இரு பக்கமும் ab-ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}\quad\ldots\quad(2)$$

எனவே, நீள் வட்டம் $\dfrac{x^2}{a_2}+\dfrac{y_2}{b^2}=1$-இன் மீதுள்ள $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

7·17. நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-க்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-இல் $P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2} \quad (1)$$

Q புள்ளி P புள்ளியை நெருங்கி, முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும் போது, PQ நாண் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே. சமன்பாடு (1)-இல் $\phi=\theta$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\theta}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\theta}{2}=\cos\frac{\theta-\theta}{2}$$

(அ-து) $\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=\cos 0=1.$

$\therefore$ $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1.$$

7·18. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

நீள் வட்டத்திற்கு $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1.$$

இதன் சரிவு,

$$=-\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

∴ செங்கோட்டின் சரிவு,

$$= \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta}.$$

எனவே, $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$y - b \sin \theta = \frac{a \sin \theta}{b \cos \theta}(x - a \cos \theta)$$

$$by \cos \theta - b^2 \sin \theta \cos \theta = ax \sin \theta - a^2 \sin \theta \cos \theta.$$

(அ-து) $ax \sin \theta - by \cos \theta = (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta.$

இரு பக்கமும் $\sin \theta \cos \theta$-வால் வகுக்க,

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2.$$

எனவே, $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos \theta} - \frac{by}{\sin \theta} = a^2 - b^2.$$

7·19. θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

நீள் வட்டத்திற்கு θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்,

$$\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x}{a} \cos \phi + \frac{y}{b} \sin \phi = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-ஐ விடுவிப்பின் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-ஐ $\sin \phi$-யால் பெருக்க,

$$\frac{x}{a} \cos \theta \sin \phi + \frac{y}{b} \sin \theta \sin \phi = \sin \phi \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-ஐ $\sin\theta$-வால் பெருக்க,

$$\frac{x}{a}\cos\phi\sin\theta+\frac{y}{b}\sin\phi\sin\theta=\sin\theta \quad \dots \quad (4)$$

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\frac{x}{a}[\cos\theta\sin\phi-\sin\theta\cos\phi]=\sin\phi-\sin\theta$$

(அ-து) $\frac{x}{a}\sin(\phi-\theta)=2\sin\frac{\phi+\theta}{2}\cdot\cos\frac{\phi-\theta}{2}$

$$\therefore \quad x=\frac{2a\sin\frac{\phi-\theta}{2}\cos\frac{\phi+\theta}{2}}{2\sin\frac{\phi-\theta}{2}\cos\frac{\phi-\theta}{2}}$$

(அ-து) $x=\dfrac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}$.

இவ்வாறே $y=\dfrac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}$.

எனவே, θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி,

$$\left[\frac{a\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}},\ \frac{b\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right].$$

மாதிரி 8 : நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-இன் மீது θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் ஒரு குவியம் வழிச் செல்லின்,

$$\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}=\frac{e-1}{e+1} \text{ என நிறுவுக.}$$

θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

இது குவியம் $S\,(ae,\ 0)$ வழிச் செல்லின்,

$$e\cos\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

(அ - து) $$e=\frac{\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}}{\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}}$$

$$\therefore\quad \frac{e-1}{e+1}=\frac{\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}-\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}}{\cos\dfrac{\theta-\phi}{2}+\cos\dfrac{\theta+\phi}{2}}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\phi}{2}}{2\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\phi}{2}}$$

$$=\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2}.$$

மாதிரி 9 : $(\theta-\phi)$ ஒரு மாறிலியெனின், θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் ஒரு நிலையான நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடாகு மென நிறுவுக.

θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

$\theta-\phi=2c$ (மாறிலி) எனில்,

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2}+\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos c.$$

$\theta + \phi = 2\psi$ எனின்,

$$\frac{x}{a}\cos\psi + \frac{y}{b}\sin\psi = \cos c$$

(அ-து) $\dfrac{x}{a\cos c}\cos\psi + \dfrac{y}{b\cos c}\sin\psi = 1.$

இக்கோடு $\dfrac{x^2}{a^2\cos^2 c} + \dfrac{y^2}{b^2\cos^2 c} = 1$ என்ற நிலையான நீள் வட்டத்தைத் தொடும்.

மாதிரி 10 : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் P புள்ளிக்கு அதன் துணை வட்டத்தின் Q புள்ளி ஒத்த புள்ளி எனில், இவ்விரு புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P, Q புள்ளிகள் ஒத்த புள்ளிகளெனில், அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே,

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ ஆகும்.

நீள் வட்டம் $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$-க்கு P யிடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

துணை வட்டம் $x^2+y^2=a^2$-க்கு Q-விடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{x}{\cos\theta} - \frac{y}{\sin\theta} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இரண்டும் வெட்டும் புள்ளிகள் $R\ (x_1, y_1)$ எனின்,

$$\frac{ax_1}{\cos\theta} - \frac{by_1}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$\frac{x_1}{\cos\theta} - \frac{y_1}{\sin\theta} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இல் θ-வை நீக்கினால் R-இன் இயங்கு வழி கிடைக்கப்பெறும்.

(4)-இலிருந்து $\frac{x_1}{\cos\theta} = \frac{y_1}{\sin\theta} = \sqrt{x_1^2+y_1^2}$

$$\therefore \quad \cos\theta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}$$

இம் மதிப்புக்களை (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{ax_1}{x_1}\sqrt{x_1^2+y_1^2} - \frac{by_1}{y_1}\sqrt{x_1^2+y_1^2} = a^2-b^2.$$

(அ-து) $\quad (a-b)\sqrt{x_1^2+y_1^2} = a^2-b^2.$

இருபக்கமும் வர்க்கப்படுத்த,

$$(a-b)^2(x_1^2+y_1^2) = (a^2-b^2)^2.$$

ஏனவே, $R\,(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி,

$$x^2+y^2 = \left(\frac{a^2-b^2}{a-b}\right)^2$$

(அ-து) $\quad x^2+y^2 = (a+b)^2.$

மாதிரி 11 : $lx+my+n=0$ அல்லது $x\cos\alpha+y\sin\alpha = p$ எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் செங்கோடாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு காண்க.

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

நீள் வட்டத்திற்கு θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு எனக் கொள்வோம்.

θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2-b^2 \qquad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{\frac{\cos\alpha}{a}}{\cos\theta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{-b}}{\sin\theta} = \frac{p}{a^2-b^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{\cos\theta\cos\alpha}{a} = -\frac{\sin\theta\sin\alpha}{b} = \frac{p}{a^2-b^2}.$$

எனவே, $\cos\theta = \dfrac{ap}{(a^2-b^2)\cos\alpha}$

$$\sin\theta = \frac{-bp}{(a^2-b^2)\sin\alpha}.$$

$$\therefore \quad 1 = \cos^2\theta + \sin^2\theta$$

$$= \frac{a^2p^2}{(a^2-b^2)^2\cos^2\alpha} + \frac{b^2p^2}{(a^2-b^2)^2\sin^2\alpha}$$

(அ-து) $\dfrac{a^2}{\cos^2\alpha} + \dfrac{b^2}{\sin^2\alpha} = \dfrac{(a^2-b^2)^2}{p^2}$ ... (3)

$lx+my+n=0$ செங்கோடெனில்,

$l = \cos\alpha,\ m = \sin\alpha,\ n = -p.$

எனவே கட்டுப்பாடு (3)

$\dfrac{a^2}{l^2} + \dfrac{b^2}{m^2} = \dfrac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$ என்றாகும்.

பயிற்சி 7.1.

1. ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(3, -1)$, ஒத்த இயக்கு வரை $x - y + 16 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{1}{2}$ எனில், அதன் சமன்பாடு காண்க.

2. ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(1, 2)$, ஒத்த இயக்கு வரை $2x - 3y + 6 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{2}{3}$ எனின் அதன் சமன்பாடு காண்க.

3. ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியம் $(4, 0)$, ஒத்த இயக்கு வரை $4x - 25 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $\frac{4}{5}$ எனின் அதன் சமன்பாடு காண்க.

4. ஆயங்களை அச்சுக்களாகக் கொண்ட ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியங்கள் $\left(0, \frac{\sqrt{15}}{18}\right)$, $\left(0, -\frac{\sqrt{15}}{18}\right)$, மையத்தொலை விகிதம் $\frac{\sqrt{5}}{3}$ எனின், நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

5. கீழ்க்காணும் நீள் வட்டங்களின் சமன்பாடுகளிலிருந்து, அவைகளின் மையத்தொலை விகிதம், குவியம் செவ்வகலம் காண்க.

(i) $4(x-1)^2 + 3y^2 = 4$.

(ii) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 100y - 116 = 0$

(iii) $4x^2 + 9y^2 + 8x + 36y + 4 = 0$.

(iv) $(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36$.

6. $9x^2 + 16y^2 = 144$ நீள் வட்டத்திற்கு $(0, 3)$ புள்ளியிடத்து வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு காண்க.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்து முனைகளான A, A' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளை P புள்ளியிடத்து வரையும் தொடுகோடு Q, R புள்ளிகளில் சந்திப்பின், $AQ.A'R = b^2$ என நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்குக் குவியங்கள், முனைகள், மையம் இவைகளிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே $l, l'; m, m'; e$ எனின், $ll' - e^2 = e^2(mm' - e^2)$ என நிறுவுக.

9. ஒரு நீள் வட்டத்து PQ நாண் நீள் வட்டத்தின் மையத்தில் ஏற்கும் கோணம் $90°$ எனின், P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழி, $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ என நிறுவுக.

10. ஒரு நீள் வட்டத்துக் குவிய நாணின் முனைகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் θ, ϕ எனின் $\cos\frac{\theta-\phi}{2} = e\cos\frac{\theta+\phi}{2}$ என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில் θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் $(a, 0)$ புள்ளியில் ஏற்கும் கோணம் 90° எனின் $\tan\frac{\theta}{2}\tan\frac{\phi}{2} = -\frac{b^2}{a^2}$ என நிறுவுக.

12. $\frac{x^2}{14} + \frac{y^2}{5} = 1$ நீள் வட்டத்தில் θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு நீள் வட்டத்தை மீண்டும் 2θ கோணத்தில் வெட்டினால், $\cos\theta = -\frac{2}{3}$ என நிறுவுக.

13. அச்சுக்களுடன் சமகோணத்தை ஏற்கும் நீள் வட்டத்தின் செங்கோடு, அச்சுக்களுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் பரப்பு $\frac{(a^2-b^2)^2}{2(a^2+b^2)}$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு சிற்றச்சை Q புள்ளியில் சந்திக்கிறது. S, S' குவியங்களெனின், $PQ^2 - SQ^2 = SP.S'P$ என நிறுவுக.

15. ஒரு நீள் வட்டத்தின் செங்கோட்டு நாண் பேரச்சுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் 45° எனின், அந்நாணின் நீளம் $\frac{4\sqrt{2}\,a^2b^2}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ என நிறுவுக.

16. P, Q என்பவை, நீள் வட்டம், அதன் துணை வட்டம் ஆகியவைகள் மீதுள்ள ஒத்த புள்ளிகள் C நீள் வட்ட மையம். CQ-வின் நீட்டல் $x^2 + y^2 = 4(a+b)^2$ வட்டத்தை R-இல் சந்திக்குமெனின், PR கோடு $\frac{x^2}{(2a+b)^2} + \frac{y^2}{(2b+a)^2} = \frac{4}{9}$ நீள் வட்டத்தின் செங்கோடு என நிறுவுக.

17. ஒரு நீள் வட்டத்தினுள் வரையப்படும் ஒரு நாற்கரத்தின் மூன்று பக்கங்கள் பேரச்சுடன் நிலைத்த கோணங்களைப் பிறப்பிக்கும் எனின், நான்காவது பக்கமும் அதனுடன் நிலைத்த கோணம் பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

18. S, S' என்ற ஒரு நீள் வட்டத்தின் குவியங்கள், நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளி

யுடன் அமைக்கும் PSS' என்ற முக்கோணத்தின் உள் வட்ட மையத்தின் இயங்கு வழி மற்றொரு நீள் வட்டம் என நிறுவுக.

19. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆயங்களுடன் ஏற்படுத்தும் வெட்டுத் துண்டுகள் l_1, l_2 எனின், $\frac{x^2}{l_1^2} + \frac{y^2}{l_2^2} = 1$ என நிறுவுக.

20. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடு ஆயங்களை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், PQ-வின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி யாது ?

21. $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ தொடுகோடெனின், $p^2 = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \sin^2 \alpha$ என நிறுவுக.

22. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ வளைவிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் ஆயத்துடன் நிரப்புக் கோணங்கள் (complementary angles) பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

23. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் செவ்வகலம் தன் நுனியிடத்துச் செங்கோடு, பேரச்சை $(ae^2, 0)$ புள்ளியில் சந்திக்கும் என நிறுவுக. இச் செங்கோடு சிற்றச்சின் நுனிவழிச் செல்லின் $e^4 + e^2 = 1$ என நிறுவுக.

24. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் பேரச்சில் P புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டம், அதன் துணை வட்டம் ஆகியவைகளுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் அவைகளை Q, R புள்ளிகளில் தொடுமெனின், QR கோடு பேரச்சிற்குச் செங்குத்தாய் அமையும் என நிறுவுக.

25. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில் α, β புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் பேரச்சை $(d, 0)$ புள்ளியில் சந்திக்குமெனின்,

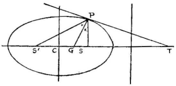
$$\tan \frac{\alpha}{2} \tan \frac{\beta}{2} = \frac{d-a}{d+a}$$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $7x^2 + 2xy + 7y^2 - 80x + 48y - 176 = 0$.
2. $(x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5)^2 = \frac{4}{13}(2x - 3y + 6)^2$.
3. $9x^2 + 25y^2 = 225$. 4. $9x^2 + 4y^2 = 36$.
5. (i) $\frac{1}{2}$, $\left(1, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $\sqrt{3}$; (ii) $\frac{4}{5}$, $(\pm 5, 2)$, $\frac{9}{5}$; (iii) $\frac{\sqrt{5}}{3}$, $[\pm\sqrt{5} - 1, -2]$, $\frac{8}{3}$; (iv) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $(1 \pm \sqrt{2}, 2)$, $\frac{4}{3}$. 6. $y - 3 = 0$. 20. $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = 4$.

7·20. நீள் வட்டத்தின் பண்புகள் (Properties)

1. ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடும், செங்கோடும் அப்புள்ளியின் குவியத் தூரங்களுக்கிடையேயுள்ள கோணத்தின் சமவெட்டிகளாகும்.



படம் 67

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடும் செங்கோடும், x ஆயத்தை முறையே T, G புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனக் கொள்வோம்.

P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2. \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

G-யின் ஆயத்தொலை பூச்சியமெனில், சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடின், $x = (a^2 - b^2)\ \frac{x_1}{a^2}$.

எனவே, G-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{(a^2-b^2)x_1}{a^2},\ 0\right]$

(அ-து) $[e^2 x_1,\ 0]$.

S, S' குவியங்களெனில் அவைகளின் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0), (-ae, 0)$.

$$S'G = S'C + CG = ae + e^2 x_1 = e\,(x_1 e + a).$$

$$GS = CS - CG = ae - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\,x_1 = ae - e^2 x_1 = e\,(a - ex_1).$$

$S'P = a + ex_1$ ... [பத்தி 7·8]

$SP = a - ex_1$ ... [பத்தி 7·8],

$$\therefore\ \frac{S'P}{SP} = \frac{S'G}{GS}.$$

எனவே, P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு PG-யும், P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு PT-யும் $S'\hat{P}S$-இன் இருசமவெட்டிகளாகும்.

$[\because\ PG \perp PT]$

2. குவிய நாணின் நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் இயக்குவரையின் மீது சந்திக்கும்.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தில்,

'θ', 'ϕ' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

இக் கோடு குவிய நாண் எனில், $S(ae, 0)$ என்ற குவியம் வழிச் செல்லும்.

$$\therefore\quad e\cos\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\frac{\theta-\phi}{2}\quad \ldots\quad \ldots\quad (1)$$

θ, ϕ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{x}{a}\cos\phi + \frac{y}{b}\sin\phi = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இவ்விரு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி

$$\left(a\,\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}},\ b\,\frac{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}}\right) \quad \text{[பத்தி 7·19]}$$

$$\therefore\ x = a\,\frac{\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\cos\frac{\theta-\phi}{2}} = \frac{a.\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{e\cos\frac{\theta+\phi}{2}} \quad [\because\ (1)]$$

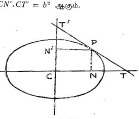
$$= \frac{a}{e}.$$

எனவே, தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $x = \frac{a}{e}$ என்ற இயக்கு வரையின் மீதமையும்.

3. நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு பேரச்சை T புள்ளியிலும், சிற்றச்சை T' புள்ளியிலும் வெட்டுகிறது. P-யிலிருந்து அச்சுக்களுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் அடிப் புள்ளிகள் N, N' எனின்,

(i) $CN.CT = a^2$

(ii) $CN'.CT' = b^2$ ஆகும்.



படம் 68.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், P-யின் ஆயத் தொலைகள் $a \cos\theta$, $b \sin\theta$ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின் சமன்பாடு (y)-யில், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்.

$$x = \frac{a}{\cos\theta} \text{ ஆகும்.}$$

$\therefore$ T புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{a}{\cos\theta}, \ 0\right]$

T' புள்ளியின் x ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப்பிரதியிடின்,

$$y = \frac{b}{\sin\theta} \text{ ஆகும்.}$$

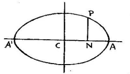
$\therefore$ T' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left[0, \ \frac{b}{\sin\theta}\right]$.

எனவே, $CN.CT = a\cos\theta.\frac{a}{\cos\theta} = a^2$.

$$CN'.CT' = b\sin\theta.\frac{b}{\sin\theta} = b^2.$$

4. நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி P-யிலிருந்து பேரச்சுக்கு வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளி N. A, A' புள்ளிகள் பேரச்சின் நுனிகளெனின்,

$$\frac{PN^2}{A'N.NA} = \frac{b^2}{a^2} \text{ என நிறுவுக.}$$



படம் 68(a)

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (CN, NP). P புள்ளி நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் மீதமைவதால்,

$$\frac{CN^2}{a^2} + \frac{NP^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore \quad \frac{NP^2}{b^2} = 1 - \frac{CN^2}{a^2}$$

$$= \frac{a^2 - CN^2}{a^2}$$

$$= \frac{CA^2 - CN^2}{a^2}$$

$$= \frac{(CA+CN)(CA-CN)}{a^2}$$

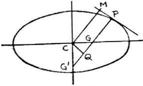
$$= \frac{A'N.NA}{a^2}.$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{A'N.NA} = \frac{b^2}{a^2}.$$

5. நீள் வட்டத்தின் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பேரச்சையும், சிற்றச்சையும் முறையே G, G' புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது. நீள் வட்ட மையம் C-யிலிருந்து இச்செங்கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி Q எனின்,

$$PQ.PG' = a^2$$

$$PQ.PG = b^2 \quad \text{என்றாகும்.}$$



படம் 69.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ எனவும், P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

G புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (1)-இல் $y=0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$x=\frac{(a^2-b^2)\cos\theta}{a}.$$

எனவே, G-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta,\ 0\right]$

G' புள்ளியின் x ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின் சமன்பாடு (1)-இல் $x=0$ எனின்,

$$y=-\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta.$$

$\therefore$ G'-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[0,\ -\frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right]$

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$PQ=CM=C(0,0)$-த்திலிருந்து கோடு (2)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}}}=\frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta+a^2\sin^2\theta}}$$

$$PG=\sqrt{\left\{a\cos\theta-\frac{a^2-b^2}{a}\cos\theta\right\}^2+b^2\sin^2\theta}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{b^2\cos\theta}{a}\right)^2+b^2\sin^2\theta}$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$PG' = \sqrt{\left\{a^2\cos^2\theta + \left[b\sin\theta + \frac{a^2-b^2}{b}\sin\theta\right]^2\right\}}$$

$$= \sqrt{\left[a^2\cos^2\theta + \left(\frac{a^2\sin\theta}{b}\right)^2\right]}$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}.$$

$$\therefore\ PQ.PG' = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \cdot \frac{a}{b}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

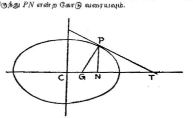
$$= a^2.$$

$$PQ.PG = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}} \cdot \frac{b}{a}\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}$$

$$= b^2.$$

7·21. தொடுகோட்டடி (Subtangent), செங்கோட்டடி (Subnormal)

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ எனவும், அதன் மீதுள்ள P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும் கொள்க, P-யிடத்துத் தொடுகோடும், செங்கோடும் x ஆயத்தை முறையே T, G புள்ளிகளில் சந்திக்கட்டும். x ஆயத்திற்குச் செங்குத்தாக P-யிலிருந்து PN என்ற கோடு வரையவும்.



படம் 70

NT தொடுகோட்டடி (subtangent), GN வரைசெங்கோட்டடி (subnormal) எனப்படும்.

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

T புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (1)-இல், $y=0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$x = \frac{a^2}{x_1} \text{ என்றாகும்.}$$

எனவே, T-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right)$.

P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு,

$$\frac{a^2x}{x_1} - \frac{b^2y}{y_1} = a^2 - b^2. \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

G புள்ளியின் y ஆயத்தொலை பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (2)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a^2} x_1 \text{ ஆகும்.}$$

எனவே. G-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left[\frac{a^2-b^2}{a^2} x_1, 0\right]$.

தொடுகோட்டடி NT-யின் நீளம்

$$= CT - CN = \frac{a^2}{x_1} - x_1 = \frac{a^2 - x_1^2}{x_1}$$

வரை செங்கோட்டடி GN-இன் நீளம்

$$= CN - CG = x_1 - \frac{x_1(a^2 - b^2)}{a^2} = \frac{b^2 x_1}{a^2}.$$

7·22. குறித்த புள்ளியிலிருந்து நீள்வட்டத்திற்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையக்கூடும். இச் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள்தம் துணை வட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத்தொகை π-யின் ஒற்றை மடங்காகும்

கொடுத்துள்ள புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம். நீள்வட்டத்திற்கு $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது (x_1, y_1) புள்ளிவழிச் செல்லின்,

$$\frac{ax_1}{\cos\theta} - \frac{by_1}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

(அ-து) $$\frac{ax_1}{\dfrac{1-\tan^2\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}} - \frac{by_1}{\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{2}}{1+\tan^2\dfrac{\theta}{2}}} = a^2 - b^2.$$

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ எனின்,

$$\frac{ax_1(1+t^2)}{(1-t^2)} - \frac{by_1(1+t^2)}{2t} = (a^2-b^2) = a^2e^2.$$

(அ-து) $ax_1(1+t^2)2t - by_1(1+t^2)(1-t^2) = 2t(1-t^2)a^2e^2$

(அ-து) $$by_1t^4 + 2(ax_1+a^2e^2)t^3 + 2(ax_1-a^2e^2)t - by_1 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

இது t-யில் நாற்படிச் சமன்பாடாதலின், $t\tan\dfrac{\theta}{2}$ நான்கு மதிப்புக்கள் பெற்றிருக்கும்.

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$ ஆதலின்

$\theta = 2\tan^{-1}(t)$

$\therefore\ \theta = 2n\pi + 2\tan^{-1}(t)$

எனவே, $t = \tan\frac{\theta}{2}$-இன் ஒரு மதிப்புக்கு நீள் வட்டத்தில் ஒருபுள்ளி மட்டும் கிடைக்கப் பெறும். $\tan\frac{\theta}{2}$-இன் நான்கு மதிப்புக்களுக்கும் நீள் வட்டத்தில் நான்கு புள்ளிகள் கிடைக்கப்பெறும். இவை மெய் அல்லது கற்பனைப் புள்ளிகள் ஆகும்.

எனவே, நீள் வட்டத்திற்கு இப்புள்ளிகளிடத்து வரையும் செங்கோடுகள் நான்கும் (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும். (அ-து) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு நான்கு செங்கோடுகள் வரையக்கூடும்.

சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகள் $t_1 = \tan\frac{\theta_1}{2}$, $t_2 = \tan\frac{\theta_2}{2}$, $t_3 = \tan\frac{\theta_3}{2}$, $t_4 = \tan\frac{\theta_4}{2}$ எனின்,

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2(ax_1 + a^2e^2)}{by_1} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$S_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

$$S_3 = t_1t_2t_3 + t_1t_3t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_4t_2 = -\frac{2(ax_1 - a^2e^2)}{by_1} \quad (6)$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 + S_2 - S_4}.$$

$$S_1 - S_3 \neq 0, \quad 1 + S_2 - S_4 = 0.$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}\right) = \infty.$$

(அ-து) $\dfrac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi + \dfrac{\pi}{2}$

(அ-து) $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 = (2n+1)\pi$

எனவே, அடிப்புள்ளிகளின் துணைவட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை π-இன் ஒற்றை மடங்காகும்.

7·23. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தில் மூன்று புள்ளிகளின் துணைவட்டக் கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3$. இப்புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லின், $\sin(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_2+\theta_3) + \sin(\theta_3+\theta_1) = 0$

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின், இப் புள்ளிவழிச் செல்லும் நான்காவது செங்கோட்டின் அடிப்புள்ளி θ_4 எனக் கொள்வோம்.

பத்தி 7·22-இல் சமன்பாடுகள் (5), (7)-இன் படி,

$$S_2 = \Sigma \tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$S_4 = \tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2}\tan\frac{\theta_4}{2} = -1 \quad \ldots (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து θ_4-ஐ நீக்கின்,

$$\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2} + \tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2} + \tan\frac{\theta_3}{2}\tan\frac{\theta_1}{2}$$

$$-\left(\frac{1}{\tan\frac{\theta_1}{2}\tan\frac{\theta_2}{2}\tan\frac{\theta_3}{2}}\right)\left(\tan\frac{\theta_1}{2} + \tan\frac{\theta_2}{2} + \tan\frac{\theta_3}{2}\right) = 0$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$\Sigma\left[\tan\frac{\theta_1}{2} + \tan\frac{\theta_2}{2} - \cot\frac{\theta_1}{2}\cot\frac{\theta_2}{2}\right] = 0.$$

(அ-து) $$\Sigma\frac{\cos^2\frac{\theta_1}{2}\cos^2\frac{\theta_2}{2} - \sin^2\frac{\theta_1}{2}\sin^2\frac{\theta_2}{2}}{\sin\frac{\theta_1}{2}\sin\frac{\theta_2}{2}\cos\frac{\theta_1}{2}\cos\frac{\theta_2}{2}} = 0.$$

(அ-து) $$\Sigma\frac{2\cos\left(\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)}{\sin\theta_1\sin\theta_2} = 0.$$

(அ - து) $\sum \frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} = 0.$

(அ - து) $\frac{\cos\theta_1 + \cos\theta_2}{\sin\theta_1 \sin\theta_2} + \frac{\cos\theta_2 + \cos\theta_3}{\sin\theta_2 \sin\theta_3}$

$$+ \frac{\cos\theta_3 + \cos\theta_1}{\sin\theta_3 \sin\theta_1} = 0.$$

(அ - து) $\sin\theta_3 (\cos\theta_1 + \cos\theta_2) + \sin\theta_1 (\cos\theta_2 + \cos\theta_3)$

$$+ \sin\theta_2 (\cos\theta_3 + \cos\theta_1) = 0.$$

$$\therefore \quad \sin(\theta_1 + \theta_2) + \sin(\theta_2 + \theta_3) + \sin(\theta_3 + \theta_1) = 0.$$

7·24. ஒரு வட்டம் நீள் வட்டம் ஒன்றை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும். அவற்றின் துணை வட்டக் கோணங்களின் கூட்டுத் தொகை π-இன் இரட்டை மடங்காகும்

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad (2)$$

நீள் வட்டத்தில் யாதேனும் ஒரு புள்ளி $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ எனக்கொள்வோம்.

சமன்பாடு (2)-இல், $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$ எனப்பிரதியிடின், (1), (2) வெட்டும் புள்ளிகளின் துணை வட்டக் கோணங்கள் கிடைக்கப்பெறும்.

$$(a\cos\theta)^2 + (b\sin\theta)^2 + 2g(a\cos\theta) + 2f(b\sin\theta) + c = 0.$$

(அ-து) $a^2\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2 + b^2\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2$

$$+ 2ga\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + 2fb\left(\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right) + c = 0.$$

$t = \tan\frac{\theta}{2}$ எனின்,

$$a^2\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2 + b^2\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2$$

$$+ 2ga\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) + 2fb\left(\frac{2t}{1+t^2}\right) + c = 0.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$(a^2 + c - 2ag)t^4 + 4bft^3 + 2(c + 2b^2 - a^2)t^2 + 4bft + (c + a^2 + 2ag) = 0 \quad \dots \quad (3)$$

இது t-யில் நாற்படிச் சமன்பாடாதலின், t-யிக்கு மெய் அல்லது கற்பனை மதிப்புக்கள் நான்கு உண்டு. அவைகள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனக்கொண்டால், அவை ஒவ்வொன்றும் ஒவ்வொரு புள்ளியை மட்டும் குறிக்கும்.

எனவே, ஒரு வட்டம் நீள் வட்டம் ஒன்றை நான்கு புள்ளி களில் (மெய் அல்லது கற்பனை) வெட்டும்.

மேலும்,

$$S_1 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \frac{-4bf}{a^2 + c - 2ag} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$S_2 = t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_3t_4 + t_2t_3 + t_3t_4 = \frac{2(c + 2b^2 - a^2)}{a^2 + c - 2ag} \quad (5)$$

$$S_3 = t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = \frac{-4bf}{a^2 + c - 2ag} \quad \dots \quad (6)$$

$$S_4 = t_1t_2t_3t_4 = \frac{c + a^2 + 2ag}{a^2 + c - 2ag} \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$\tan\left(\frac{\theta_1}{2} + \frac{\theta_2}{2} + \frac{\theta_3}{2} + \frac{\theta_4}{2}\right) = \frac{S_1 - S_3}{1 - S_2 + S_4}.$$

$$1 - S_2 + S_4 \neq 0, \quad S_1 - S_3 = 0.$$

$$\therefore \quad \tan\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2}\right) = 0.$$

எனவே, $\dfrac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4}{2} = n\pi$ (n கூட்டெண்)

(அ-து) $\theta_1 + \theta_3 + \theta_3 + \theta_4 = 2n\pi$.

$= \pi$-இன் இரட்டை மடங்கு.

7·25. ஒரு வட்டம் நீள் வட்டம் ஒன்றை P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும், மற்ற இரு ள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடும் x ஆயத்துடன் சமசாய்வு கொண்டிருக்கும்.

$$\text{நீள் வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$\text{வட்டம் } x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q, R, S எனவும், அவைகளின் துணைவட்டக் கோணங்கள் $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ எனவும் கொள்வோம்.

$$PQ\text{-வின் சரிவு} = \frac{b\sin\theta_1 - b\sin\theta_2}{a\cos\theta_1 - a\cos\theta_2}$$

$$= \frac{2b\cos\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}{-2a\sin\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}\sin\dfrac{\theta_1-\theta_2}{2}}$$

$$= -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$\text{இவ்வாறே } RS\text{-இன் சரிவு} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

$$\therefore\ PQ\text{-வின் சரிவு} = -\frac{b}{a}\cot\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$= -\frac{b}{a}\cot\left(n\pi - \frac{\theta_3+\theta_4}{2}\right)$$

$$= \frac{b}{a}\cot\frac{\theta_3+\theta_4}{2}$$

$$= -RS\text{-இன் சரிவு.}$$

$\therefore$ PQ, RS கோடுகள் x ஆயத்துடன் சமச்சாய்வு கொண்டிருக்கும்.

பிறிதொரு முறை :

$$\left.\begin{array}{l} PQ\text{-வின் சமன்பாடு } l_1x + m_1y + n_1 = 0 \\ RS\text{-இன் சமன்பாடு } l_2x + m_2y + n_2 = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{நீள்வட்டம் } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

(1), (2) வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \lambda(l_1x+m_1y+n_1)(l_2x+m_2y+n_2) = 0$$

xy-யின் கெழு பூச்சியமெனில், இஃது ஒரு வட்டமாகும்.

$\therefore \quad \lambda(l_1 m_2 + l_2 m_1) = 0.$

$\lambda \neq 0, \quad \therefore \quad l_1 m_2 + l_2 m_1 = 0$

(அ-து) $\dfrac{l_1}{m_1} = -\dfrac{l_2}{m_2}.$

எனவே, λ-வின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும்

PQ-வின் சரிவு $= -RS$-இன் சரிவு.

(அ-து) PQ, RS கோடுகள் x ஆயத்துடன் சமச் சாய்வு கொண்டிருக்கும்.

மாதிரி 12: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தில் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளிவழிச் செல்லின்,

$$(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}\right) = 4$$

என நிறுவுக.

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2 x}{x_1} - \frac{b^2 y}{y_1} = a^2 - b^2.$$

இது (h, k) புள்ளிவழிச் செல்லின்,

$$\frac{a^2 h}{x_1} - \frac{b^2 k}{y_1} = a^2 - b^2.$$

(அ-து) $a^2 h y_1 - b^2 k x_1 = (a^2 - b^2) x_1 y_1$

(அ-து) $a^2 y_1 (h - x_1) = b^2 x_1 (k - y_1)$

(அ-து) $y_1 \{a^2 (h - x_1) + b^2 x_1\} = b^2 k x_1 \quad \ldots \quad (1)$

(x_1, y_1) புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ளதால்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1,$$

(அ-து) $y_1^2 = \dfrac{b^2(a^2 - x_1^2)}{a^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

(2)-ஐ (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x_1^2}\,[a^2(h-x_1)+b^2x_1]=b^2kx_1.$$

இதை வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$\frac{b^2}{a^2}(a^2-x_1^2)\,[a^2(h-x_1)+b^2x_1]^2=b^4k^2x_1^2.$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$(a^2-b^2)^2x_1^4-2a^2h(a^2-b^2)x_1^3-[a^2\{(a^2-b^2)^2-a^2h^2-b^2k^2\}]x_1^2+2a^4h(a^2-b^2)x_1-a^6h^2=0 \quad (3)$$

இஃது ஒரு நாற்படிச் சமன்பாடாதலின், x-க்கு நான்கு மதிப்புக்கள் உண்டு. அவைகள் x_1, x_2, x_3, x_4 எனின்,

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\frac{2a^2h(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}=\frac{2ha^2}{a^2-b^2}.$$

$$\Sigma\, x_1x_2x_3=-\frac{2a^4h(a^2-b^2)}{(a^2-b^2)^2}=-\frac{2ha^4}{a^2-b^2}.$$

$$x_1x_2x_3x_4=-\frac{a^6h^2}{(a^2-b^2)^2}.$$

எனவே, $$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}=\frac{Sx_1x_2x_3}{x_1x_2x_3x_4}$$

$$=\frac{-2ha^4}{a^2-b^2}\div\frac{-a^6h^2}{(a^2-b^2)^2}$$

$$=\frac{2ha^4}{a^2-b^2}\times\frac{(a^2-b^2)^2}{a^6h^2}=\frac{2(a^2-b^2)}{a^2h}$$

$$\therefore\quad (x_1+x_2+x_3+x_4)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}\right)$$

$$=\left(\frac{2ha^2}{a^2-b^2}\right)\left[\frac{2(a^2-b^2)}{a^2h}\right]=4.$$

மாதிரி 13 : ஒரு நீள் வட்டத்திற்கு (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் $\frac{a^2x_1}{x} - \frac{b^2y_1}{y} = a^2 - b^2$ என்ற வளைவில் இருக்கும் என நிறுவுக.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ நீள் வட்டத்திற்கு}$$

(h, k) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2x}{h} - \frac{b^2y}{k} = a^2 - b^2.$$

இது (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$\frac{a^2x_1}{h} - \frac{b^2y_1}{k} = a^2 - b^2.$$

$\therefore$ (h, k) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{a^2x_1}{x} - \frac{b^2y_1}{y} = a^2 - b^2.$$

மாதிரி 14 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் $l_1x + m_1y = 1$, $l_2x + m_2y = 1$ என்ற நாண்களின் நுனிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லின், $a^2l_1l_2 = b^2m_1m_2 = -1$ என நிறுவுக.

$$l_1x + m_1y = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$l_2x + m_2y = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இந் நாண்களின் நுனிகள் $A, B; C, D$ எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் P புள்ளியில் சந்திக்கட்டும்.

(அ - து) P புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் A, B, C, D ஆகும்.

செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 + \lambda(l_1x + m_1y - 1)(l_2x + m_2y - 1) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

முன் மாதிரியில், ஒரு புள்ளி வழிச் செல்லும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள்,

$$\frac{a^2x_1}{x} - \frac{b^2y_1}{y} = a^2 - b^2$$

(அ-து) $(a^2-b^2)xy + b^2y_1x - a^2x_1y = 0$ ... (4)

வளைவரையில் இருக்குமெனக் கண்டோம்.

எனவே, சமன்பாடுகள் (3)-ம், (4)-ம் λ-வின் ஒரு மதிப்புக்கு முழுதும் ஒத்தனவாக இருக்கும்.

சமன்பாடு (4)-இல், x^2-இன் கெழு $= 0$

y^2-இன் கெழு $= 0$

எண்ணுறுப்பு $= 0$.

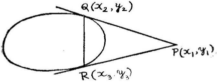
$$\therefore \quad \frac{1}{a^2} + \lambda l_1 l_2 = 0$$

$$\frac{1}{b^2} + \lambda m_1 m_2 = 0$$

$$-1 + \lambda = 0$$

$$\therefore \quad a^2 l_1 l_2 = b^2 m_1 m_2 = -1.$$

7·26. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண்



படம் 71.

$P(x_1\ y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு புள்ளிகள் $Q(x_2,\ y_2)$, $R(x_3,\ y_3)$ எனக் கொள்வோம்.

$Q(x_2,\ y_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$$

இது $P(x_1,\ y_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$R(x_3,\ y_3)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_3}{a^2}+\frac{yy_3}{b^2}=1$$

இது $P(x_1,\ y_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம்.

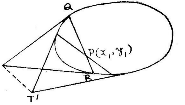
இது குறிக்கும் கோடு (1)-இன்படி $Q(x_2,\ y_2)$ வழியும், (2)-இன்படி $R(x_3,\ y_3)$ வழியும் செல்கிறது.

எனவே, இதுவே QR கோட்டின் சமன்பாடாகும்.

∴ தொடுகோடுகளின் தொடு நாண்,

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

7·27. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு



படம் 72

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு நீள் வட்டத்தை Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக்கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(h, k)$ எனில், T புள்ளியின் இயங்கு வழி (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக் கோடாகும்.

$T(h, k)$ புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடுநாண் QR-இன் சமன்பாடு

$$\frac{xh}{a^2} + \frac{yk}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இது $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்கிறதாதலின்,

$$\frac{x_1 h}{a^2} + \frac{y_1 k}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனவே, $T(h, k)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

(அ-து) $P(x_1 y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1$$

இனி : குவியம் $S(ae, 0)$ புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக்கோடு

$$\frac{xae}{a^2}=1 \qquad (\text{அ-து}) \quad x=\frac{a}{e}$$

(அ - து) $S(ae, 0)$ குவியத்தின் இசைக்கோடு நீள் வட்டத்தின் ஒத்த இயக்கு வரையாகும்.

7·28. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **நீள்வட்டத்தைச் சார்ந்த** $lx+my+n=0$ **என்ற கோட்டின் இசைப் புள்ளி**

$$lx+my+n=0 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கோட்டின்

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் (2)-ஐச் சார்ந்த இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \qquad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{l}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{m}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{-n}{1}$$

$$(\text{அ - து}) \quad x_1=-\frac{a^2l}{n},\; y_1=-\frac{b^2m}{n}.$$

எனவே, $lx+my+n=0$ கோட்டின் இசைப் புள்ளி

$$\left(-\frac{a^2l}{n}, -\frac{b^2m}{n}\right).$$

7·29. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக் கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், Q-வின் இசைக்கோடு P வழிச் செல்லும்**

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

இது $Q(x_2, y_2)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$Q(x_2, y_2)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

இது (2)-இன்படி $P(x_1, y_1)$ வழிச் செல்லும்.

7·30. துணையியப் புள்ளிகளும், துணையியக் கோடுகளும் (Conjugate Points and Conjugate Lines)

யாதேனும் இரு புள்ளிகளில் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைக் கோடு மற்றதன் வழிச் செல்லின், அவ்விரு புள்ளிகளும் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

யாதேனும் இரு கோடுகளில் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த ஒன்றின் இசைப் புள்ளி மற்றதன் மேலமையுமெனின், அவ்விரு கோடுகளும் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகள் எனப்படும்.

7·31. $l_1x+m_1y+n_1=0$, $l_2x+m_2y+n_2=0$ **கோடுகள்** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ **நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த துணையியக் கோடுகளாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு**

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த $l_1x+m_1y+n_1=0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி $\left(-\frac{a^2l_1}{n_1},\ -\frac{b^2m_1}{n_1}\right)$.

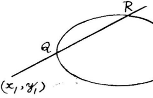
இப் புள்ளி $l_2x + m_2y + n_2 = 0$ கோட்டின் மீதமையும்.

$$\therefore \; l_2\left(-\frac{a^2l_1}{n_1}\right) + m_2\left(-\frac{b^2m_1}{n_1}\right) + n_2 = 0.$$

(அ - து) $\quad -a^2l_1l_2 - b^2m_1m_2 + n_1n_2 = 0.$

(அ - து) $\quad a^2l_1l_2 + b^2m_1m_2 = n_1n_2.$

7·32. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்



படம் 73.

$P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$(x_1 + r\cos\theta,\; y_1 + r\sin\theta).$$

இது $\quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$

நீள் வட்டத்தைச் சந்திக்குமிடங்களில்,

$$\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1.$$

$$(\text{அ-து}) \quad r^2\left[\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right]+2r\left[\frac{x_1\cos\theta}{a^2}+\frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right]$$

$$+\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=0 \qquad \ldots \quad (3)$$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் இதன் இரு மதிப்புக் களான r_1, r_2 என்பவை P புள்ளியிலிருந்து அக்கோடு நீள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான Q, R.இன் தூரங்களை அளிக்கும்.

இக்கோடு தொடு கோடெனில்,

$$PQ = PR. \qquad \therefore \quad r_1 = r_2.$$

(அ - து) சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகள் சமம்.

எனவே, சமன்பாடு (3)-இன் தன்மைக் காட்டி பூச்சிய மாகும்.

$$(\text{அ-து}) \quad \left(\frac{x_1\cos\theta}{a^2}+\frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right)^2$$

$$=\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right) \ldots (4)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$\cos\theta=\frac{x-x_1}{r}, \quad \sin\theta=\frac{y-y_1}{r}.$$

இதை (4)-இல் பிரதியிடின்,

$$\left[\frac{x_1}{a^2}\cdot\frac{x-x_1}{r}+\frac{y_1}{b^2}\cdot\frac{y-y_1}{r}\right]^2$$

$$=\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left[\frac{(x-x_1)^2}{a^2r^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2r^2}\right].$$

$$(\text{அ-து}) \quad \left[\frac{(x-x_1)x_1}{a^2}+\frac{y_1(y-y_1)}{b^2}\right]^2$$

$$=\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left[\frac{(x-x_1)^2}{a^2}+\frac{(y-y_1)^2}{b^2}\right]$$

(அ-து) $$\left[\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)\right]^2$$
$$=\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)+\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}\right)-2\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}\right)\right]$$

(அ-து) $$\left[\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)-\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)\right]^2$$
$$=\left[\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right]\left[\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right)-2\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)\right] \quad ...(5)$$

$$S \equiv \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1$$

$$S_1 \equiv \frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1$$

$T \equiv \dfrac{xx_1}{a^2}+\dfrac{yy_1}{b^2}-1$ என்ற குறியீட்டில்,

சமன்பாடு (5),

$(T-S_1)^2 = S_1(S+S_1-2T)$ என்றுகும்.

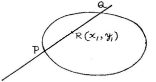
(அ - து) $T^2 = SS_1$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$T^2 = SS_1$.

(அ-து) $$\left(\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}-1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1\right).$$

7·33. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள்வட்டத்தில் (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளி யாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு



படம் 74.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

இதன் நாண் PQ எனவும், PQ-வின் நடுப்புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x - x_1}{\cos\theta} = \frac{y - y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொண்டால், இக் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta).$$

இக் கோடு நீள் வட்டத்தை வெட்டு மிடங்களில்,

$$\frac{(x_1 + r\cos\theta)^2}{a^2} + \frac{(y_1 + r\sin\theta)^2}{b^2} = 1$$

$$(\text{அ - து}) \quad r^2\left[\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}\right] + 2r\left[\frac{x_1\cos\theta}{a^2} + \frac{y_1\sin\theta}{b^2}\right] + \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் இரு மதிப்புக்களான r_1, r_2 என்பவை R புள்ளியிலிருந்து P, Q புள்ளிகளின் தூரங்களை அளிக்கும்.

R புள்ளி, PQ-வின் நடுப் புள்ளியாதலின்,

$$r_1 = -r_2$$

$$r_1 + r_2 = 0$$

(அ - து) சமன்பாடு (3)-இன் தீர்வுகளின் கூட்டுத் தொகை பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad \frac{x_1 \cos\theta}{a^2} + \frac{y_1 \sin\theta}{b^2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து,

$$\frac{x-x_1}{r} = \cos\theta, \quad \frac{y-y_1}{r} = \sin\theta.$$

இதைச் சமன்பாடு (4)-இல் பிரதியிடின்

$$\frac{x_1}{a^2} \cdot \frac{x-x_1}{r} + \frac{y_1}{b^2} \cdot \frac{y-y_1}{r} = 0$$

(அ - து) $\dfrac{xx_1 - x_1^2}{a^2} + \dfrac{yy_1 - y_1^2}{b^2} = 0$

(அ - து) $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}$

(அ - து) $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - 1 = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2} - 1.$

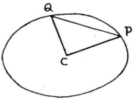
வழக்கமான குறியீட்டில், இது

$$T = S_1 \text{ என்றாகும்.}$$

$\therefore$ (x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்ட நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$.

(அ - து) $\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} = \dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}.$

மாதிரி 15 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் நாண்கள் நீள் வட்ட மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்குமெனின், அந்நாண் களின் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 75

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

நீள் வட்ட மையம் $C(0, 0)$-த்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் நாண்களில் ஒன்று PQ எனக்கொள்வோம்.

(1)-ஐச் சார்ந்த PQ-வின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின், PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடு (1)-ஐச் சமன்பாடு (2)-ஐக் கொண்டு சமபடித் தான சமன்பாடாக்கினல் CP, CQ என்ற இரட்டைக் கோடு களின் சேர்ந்த சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

(அ-து) CP, CQ-வின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} \right)^2 \quad \ldots \quad (3)$$

CP, CQ தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டுவதால், சமன்பாடு (3)-இல்

x^2-இன் கெழு $+$ y^2-இன் கெழு $= 0$.

$$\therefore \left(\frac{1}{a^2} - \frac{x_1^2}{a^4}\right) + \left(\frac{1}{b^2} - \frac{y_1^2}{b^4}\right) = 0.$$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$

எனவே, (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி,

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

மாதிரி 16 : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த P புள்ளியின் இசைக்கோட்டிற்கு நீள் வட்டத்தின் குவியங்களிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை C^2 எனின், P-யின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனபோம். நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த $P(x_1, y_1)$-இன் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1. \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$S(-ae, 0)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p_1 எனின்,

$$p_1 = \frac{\frac{x_1 e}{a} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

$S'(-ae, 0)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p_2 எனின்,

$$p_2 = \frac{\frac{-x_1 e}{a} - 1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}}$$

$p_1 p_2 = c^2$ ஆதலின்,

$$\left(\frac{x_1 e}{a} - 1\right)\left(\frac{x_1 e}{a} + 1\right) = c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right).$$

(அ-து) $-\left(\frac{x_1^2e^2}{a^2}-1\right)=c^2\left(\frac{x_1^2}{a^4}+\frac{y_1^2}{b^4}\right)$

(அ-து) $(a^2-x_1^2e^2)=a^2c^2\left[\frac{x_1^2b^4+y_1^2a^4}{a^4b^4}\right]$

(அ-து) $a^2b^4(a^2-x_1^2e^2)=a^2c^2(x_1^2b^4+y_1^2a^4)$.

(அ-து) $x_1^2b^4(a^2e^2+c^2)+y_1^2a^4c^2=a^4b^4$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x^2(a^2e^2+c^2)}{a^4}+\frac{y^2c^2}{b^4}=1 \text{ ஆகும்.}$$

மாதிரி 17: நீள் வட்டத்தின் செங்கோட்டு நாண்களின் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு, அதை மீண்டும் Q-வில் சந்திப்பின், PQ நாண் செங்கோட்டு நாண் எனப் படும்.

P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ எனவும், நாண் PQ-வின் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

P-யிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta}-\frac{by}{\sin\theta}=a^2-b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இசைக்கோடு PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3) ஒரே நேர்க்கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \frac{\frac{a}{\cos\theta}}{\frac{x_1}{a}}=\frac{\frac{-b}{\sin\theta}}{\frac{y_1}{b^2}}=\frac{a^2-b^2}{1}$$

எனவே, $\cos\theta = \dfrac{a^3}{x_1(a^2-b^3)}$, $\sin\theta = -\dfrac{b^3}{y_1(a^2-b^2)}$.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ ஆதலின்,

$$\frac{a^6}{x_1{}^2(a^2-b^2)^2} + \frac{b^6}{y_1{}^2(y^2-b^2)^2} = 1.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{a^6}{x^2(a^2-b^2)^2} + \frac{b^6}{y^2(a^2-b^2)^2} = 1$$

(அ-து) $\dfrac{a^6}{x^2} + \dfrac{b^6}{y^2} = (a^2-b^2)^2.$

மாதிரி 18 : $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டுமெனின், P புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

நீள் வட்டம் $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

$P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து (1)-க்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்

$$T^2 = SS_1.$$

(அ-து) $\left(\dfrac{xx_1}{a^2} + \dfrac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2$

$$= \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right) \quad \ldots (௨)$$

இவைகள் தம்முள் செங்குத்தாயிருப்பின், சமன்பாடு (௨)-இன்

x^2-இன் கெழு $+$ y^2-இன் கெழு $= 0$.

(அ-து) $\left\{\dfrac{x_1{}^2}{a^4} - \dfrac{1}{a^2}\left(\dfrac{x_1{}^2}{a^2} + \dfrac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right)\right\}$

$$+ \left\{\frac{y_1{}^2}{b^4} - \frac{1}{b^2}\left(\frac{x_1{}^2}{a^2} + \frac{y_1{}^2}{b^2} - 1\right)\right\} = 0$$

$$\therefore \ \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

$$= \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{x_1^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{a^2 b^2} + \frac{y_1^2}{b^4} - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right).$$

(அ-து) $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{x_1^2 + y_1^2}{a^2 b^2}$

(அ-து) $a^2 + b^2 = x_1^2 + y_1^2$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

இது குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் எனப்படும்.

மாதிரி 19 : நீள் வட்ட மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

நீள் வட்ட மையம் $C(0, 0)$-த்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் நாண்களில் ஒன்று PQ எனவும், அதன் நடுப்புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore$ PQ நாணின் சமன்பாடு

$$T = S_1$$

(அ-து) $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$ ... (2)

சமன்பாடு (1)-ஐச் சமன்பாடு (2)-இனால் சமபடித்தான சமன்பாடாக்கின், CP, CQ என்ற இரட்டைக் கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கப்பெறும்.

$\therefore$ CP, CQ-வின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \left\{\frac{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2}}{\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}}\right\}^2 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

CP, CQ கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தானவை யாதலின், சமன்பாடு (3)-இல்,

x^2-இன் கெழு $+$ y^2-இன் கெழு $= 0$.

$$\text{(அ-து)} \quad \left\{ \frac{1}{a^2} - \frac{\dfrac{x_1^2}{a^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2} \right\}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{b^2} - \frac{\dfrac{y_1^2}{b^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2} \right\} = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{\dfrac{x_1^2}{a^4} + \dfrac{y_1^2}{b^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}.$$

எனவே, $R(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி

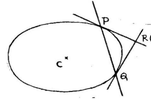
$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}.$$

மாதிரி 20 : $\dfrac{x^2}{a} + \dfrac{y^2}{b} = a+b$ நீள் வட்டத்தை $\dfrac{x}{a}\cos\theta$ $+ \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$ எனும் கோடு வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டும் என நிறுவுக.

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = (a+b) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கோடு (2), நீள் வட்டம் (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q எனவும், இப்புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் தம்முள் வெட்டும் புள்ளி $R(x_1, y_1)$ எனவும் கொள்வோம்.



படம் 76

(x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண் PQ ஆதலின், அதன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} = a + b \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3) ஒரே நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{\frac{\cos\theta}{a}}{\frac{x_1}{a}} = \frac{\frac{\sin\theta}{b}}{\frac{y_1}{b}} = \frac{1}{a+b}$$

(அ-து) $\cos\theta = \frac{x_1}{a+b}, \quad \sin\theta = \frac{y_1}{a+b}$

எனவே, $\frac{x_1^2}{(a+b)^2} + \frac{y_1^2}{(a+b)^2} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1.$

$$\therefore \quad x_1^2 + y_1^2 = (a+b)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

மேலும், RP, RQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1.$$

(அ-து) $$\left[\frac{xx_1}{a} + \frac{yy_1}{b} - a - b\right]^2$$

$$= \left[\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} - 1\right]\left[\frac{x_1^2}{a} + \frac{y_1^2}{b} - 1\right]$$

இக் கோடுகள் தம்முள் செங்குத் தெனில்,

x^2-இன் கெழு $+$ y^2-இன் கெழு $= 0$.

(அ - து) $\frac{1}{a}\left(a+b-\frac{y_1^2}{b}\right)+\frac{1}{b}\left(a+b-\frac{x_1^2}{a}\right)$

$$= 1+\frac{b}{a}-\frac{y_1^2}{ab}+\frac{a}{b}+1-\frac{x_1^2}{ab}$$

$$= 2+\frac{a^2+b^2}{ab}-\frac{x_1^2+y_1^2}{ab}$$

$$= \frac{2ab+a^2+b^2-(x_1^2+y_1^2)}{ab}$$

$$= \frac{(a+b)^2-(x_1^2+y_1^2)}{ab}$$

$$= \frac{[(a+b)^2-(a+b)^2]}{ab} = 0 \quad \ldots [(4)\text{-இலிருந்து}].$$

எனவே, தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும்.

பயிற்சி 7.2.

1. ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் செங் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகளில் இரண்டு $lx+my=1$ கோட்டின்மீது அமையுமெனின் மற்ற இரு புள்ளிகள் $\frac{x}{a^2l}+\frac{y}{b^2m}+1=0$ என்ற கோட்டின்மீது அமையும் என நிறுவுக.

2. ஒரு புள்ளியிலிருந்து நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் செங் கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் A, B, C, D. AB, CD கோடுகளின் நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகள் (α, β), (h, k) எனின், $\alpha h = -a^2$, $\beta k = -b^2$ என நிறுவுக.

3. $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்குத் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள் தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

4. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்ட நாண்கள் (x_1, y_1) எனும் நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லின் அந்நாண்களின் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க. இஃது ஒரு நீள் வட்டம் என நிறுவுக.

5. $lx+my = 1$-இன் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-ஐச் சார்ந்த இசைப் புள்ளி $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 4$ என்ற வட்டத்தின்மீது அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு யாது ?

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் நாண்களின் இசைப்புள்ளிகள் துணை வட்டத்தின்மீது அமையுமெனின், அந்நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $x^2+y^2 = a^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)^2$ என நிறுவுக.

7. $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

8. நீள் வட்டத்திற்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் இசைப் புள்ளி Q புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் மீதமையுமெனின், Q புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் இசைப் புள்ளி P-யிடத்துச் செங்கோட்டின் மீதமையு மென நிறுவுக.

9. நீள் வட்டத்தில் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு பேரச்சை G புள்ளியில் சந்திக்கும். செங்கோட்டில் $PQ = PG$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் அமைந்துள்ள Q புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் $\frac{x^2}{\frac{1}{c^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{b^2}} = 1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

11. $x^2+y^2=a^2-b^2$ வட்டத்தைச் சார்ந்த $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டச் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகள் தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தைச் சார்ந்த $x^2+y^2=r^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகள்தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=1$ என நிறுவுக.

13. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகள் PQ, PR நீள் வட்டத்தின் குவியம் $S(ae, 0)$ எனின்,

$$\frac{SP^2}{SQ.SR}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் புள்ளிகளிலிருந்து $x^2+y^2=r^2$ வட்டத்திற்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாண் $a^2x^2+b^2y^2=r^2$ எனும் நீள் வட்டத்தைத் தொடும் என நிறுவுக.

15. C புள்ளி $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$-இன் மையம். நீள் வட்டத்தின் P புள்ளிக்கு ஒத்தபுள்ளி Q எனின், CQ-வின் நீட்டல் $x^2+y^2=4(a+b)^2$ வட்டத்தை R புள்ளியில் வெட்டுகிறது. PR எனும் கோடு,

$$\frac{x^2}{(2a+b)^2}+\frac{y^2}{(2b+a)^2}=\frac{4}{9}$$

எனும் நீள் வட்டத்தின் செங்கோடு என நிறுவுக.

விடைகள்

3. $\frac{x^2\alpha^2}{a^4}+\frac{y^2\beta^2}{b^4}=1$. 5. $a^2l^2+b^2m^2=4$.

7. $r^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)^2$. 9. $\left(\frac{ax}{a^2+b^2}\right)^2+\frac{y^2}{4b^2}=1$. 10. $a^2c^4x^2+b^2c^4y^2=1$. 11. $\frac{a^3}{x^2}+\frac{b^3}{y^2}=1$.

7·34. நீள் வட்டத்தின் விட்டம்

ஒரு நீள் வட்டத்தின் இணை நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி, நீள் வட்டத்தின் விட்டம் (diameter) எனப்படும்.

7·35. நீள் வட்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் இணை நாண்கள் (parallel chords) ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1)-ஐ நடுப் புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு

$$T = S_1.$$

$$(அ\text{-}து) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}.$$

$$இதன் சரிவு = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

இணை நாண்கள் யாவும் $y = mx$ கோட்டிற்கு இணை யெனின், நாண்கள் அனைத்தின் சரிவும் m-க்குச் சமமாகும்.

$$\therefore \; m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

எனவே, (x_1, y_1) நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

(அ-து) $y = mx$ கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

இ∴து ஆதி (அ-து) நீள் வட்ட மையம் வழிச் செல்லும் ஒரு கோடாதலின், இது நீள் வட்டத்தின் விட்டம் எனப்படும்.

7·36. நீள் வட்ட விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = -\frac{b^2}{a^2 m} x.$$

இதை $y = m_1 x$ வடிவில் எழுதினுல்,

$$m_1 = -\frac{b^2}{a^2 m}.$$

(அ-து) $mm_1 = -\frac{b^2}{a^2}$.

(அ-து) $y = m_1 x$ எனும் கோடு $y = mx$ என்ற கோட்டிற்கு இணையாக உள்ள நாண்கள் அனைத்தையும் சமமாகப் பிரிக்கு மெனின்,

$$mm_1 = -\frac{b^2}{a^2} \text{ ஆகும்.}$$

இக் கட்டுப்பாடு சமச் சீருள்ளதால் (symmetric), $y = m_1 x$-க்கு இணையாக உள்ள நாண்களை $y = mx$ எனும் கோடு சமமாகப் பிரிக்கும்.

எனவே, நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் விட்டம் ஒன்று பிறிதொரு விட்டத்திற்கு இணையாக உள்ள நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்குமெனின், அவைகள்தம் சரிவுகளின் பெருக்குத் தொகை $-\frac{b^2}{a^2}$ ஆகும். இத் தன்மை பெற்றுள்ள இரு விட்டங்கள் துணை யிய விட்டங்கள் (conjugate diameters) எனப்படும்.

(அ-து) நீள் வட்டத்தின் இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்ற தற்கு இணையாக உள்ள நாண்களை இரு சமமாகப் பிரிக்குமெனின், அவ்விரு விட்டங்களும் துணையிய விட்டங்கள் எனப்படும்.

7·37. நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

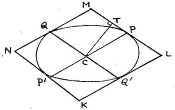
A, A' — பேரச்சின் நுனிகள்

B, B' — சிற்றச்சின் நுனிகள்

S, S' — நீள் வட்டத்தின் குவியங்கள்

பேரச்சு நீளம் $2a$, சிற்றச்சு நீளம் $2b$.

(i) இரு துணையிய விட்டங்கள்தம் நுனிகளின் துணை வட்டக் கோணங்களின் வேறுபாடு ஒரு செங்கோணமாகும்.



படம் 77.

PCP', QCQ' இரு துணையிய விட்டங்கள் எனவும், P, Q புள்ளிகளின் துணை விட்டக் கோணங்கள் முறையே θ, ϕ எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore$ P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$.

$C(0, 0)$ ஆதலின்,

$$CP\text{-யின் சரிவு} = \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}$$

$$CQ\text{-வின் சரிவு} = \frac{b\sin\phi}{a\cos\phi}$$

CP, CQ துணையிய விட்டங்களாதலின், அவைகள்தம் சரிவுகளின் பெருக்குத்தொகை, $-\dfrac{b^2}{a^2}$.

$$\therefore\ \frac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot\frac{b\sin\phi}{a\cos\phi} = -\frac{b^2}{a^2}.$$

(அ-து) $\sin\theta\ \sin\phi = -\cos\theta\cos\phi$

(அ-து) $\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi = 0$

$$\therefore \quad \cos(\theta-\phi) = 0$$

$$\therefore \quad \theta-\phi = \frac{\pi}{2}.$$

(ii) **துணையிய இரு அரைவிட்டங்கள்தம் (Semidiameters) வர்க்கங்களின் கூட்டுத் தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.**

CP, CQ துணையிய அரைவிட்டங்கள் P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்.

$$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$$

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்,

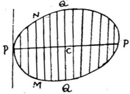
$$[a\cos(90+\theta),\quad b\sin(90+\theta)]$$

(அ - து) $\quad (-a\sin\theta,\ b\cos\theta).$

$$CP^2 = (a\cos\theta-0)^2 + (b\sin\theta-0)^2$$
$$= a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta.$$
$$CQ^2 = (a-\sin\theta-0)^2 + (b\cos\theta-0)^2$$
$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$$\therefore \quad CP^2+CQ^2 = a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + b^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)$$
$$= a^2+b^2.$$
= ஒரு மாறிலி.

(iii) **நீள் வட்ட விட்டத்தின் நுனியிடத்துத் தொடுகோடு அவ்விட்டம் இரு சமமாகப் பிரிக்கும் இணை நாண்களுக்கு இணையாக இருக்கும்.**



படம் 78.

நீள் வட்டத்தில் $P(x_1, y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு கொண்ட நாண் MN-க்கு இணையெனக் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு.

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கோடுகள் (1), (2) தம்முள் இணையாதலின், அவைகள் தம் சரிவுகள் சமம்.

$$\therefore \quad m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}$$

(அ-து) (x_1, y_1) புள்ளி, $y = -\dfrac{b^2 x}{a^2 m}$ கோட்டின் மீதமையும். பத்தி 7·34-இன்படி இக்கோடு MN மற்றும் அதற்கு இணையாக உள்ள நாண்கள் அனைத்தையும் இரு சமமாகப் பிரிக்கும்.

(iv) P, P'; Q, Q' நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளால் **அமையும் நாற்கரத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலியாகும்.**

பத்தி 7·36 (i)-இன், படம் 77-ஐப் பார்க்கவும்.

P, P'; Q, Q' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளால் அமையும் நாற்கரம் $KLMN$.

C புள்ளியிலிருந்து LM கோட்டிற்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்,

$$CT = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{a^2} + \dfrac{\sin^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta}}$$

[$\because$ P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு LM, $\dfrac{x}{a}\cos\theta + \dfrac{y}{b}\sin\theta = 1$, $c(0, 0)$]

மேலும் $PM = CQ = \sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$.

$\therefore$ இணைகரம் $KLMN$-இன் பரப்பு

$$= 4\ (\text{இணைகரம் } CPMQ)$$

$$= 4\ [PM.CT]$$

$$= 4\ [\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}]\left[\frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}\right]$$

$$= 4\,ab$$

= மாறிலி.

(v) நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள P புள்ளியின் குவியத் தூரங்கள்தம் (focal distances) பெருக்குத் தொகை P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டத்தின் வர்க்கத்திற்குச் சமம். (அ - து) $SP.S'P = CQ^2$.

பத்தி 7·8-இன் படி,

$$SP = a - ae\cos\theta$$

$$S'P = a + ae\cos\theta.$$

$$\therefore\ SP.SP' = (a - ae\cos\theta)(a + ae\cos\theta)$$

$$= a^2 - a^2e^2\cos^2\theta$$

$$= a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\theta \qquad [\because\ a^2 - b^2 = a^2e^2]$$

$$= a^2(1 - \cos^2\theta) + b^2\cos^2\theta$$

$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$$CQ^2 = (-a\sin\theta - 0)^2 + (b\cos\theta - 0)^2$$

$$[\because\ Q\,(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)]$$

$$= a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$$\therefore\ SP.S'P = CQ^2.$$

(vi) P புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டிற்கு நீள் வட்ட மையம் C-யிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம் p எனில், $p.CQ = ab$.

P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ எனின்,

P-யிடத்துத் தொடு கோடு

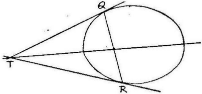
$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1.$$

C-யின் ஆயத் தொலைகள் $(0, 0)$ ஆதலின்,

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2\theta}{a^2} + \frac{\sin^2\theta}{b^2}}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}}$$

$$= \frac{ab}{CQ}.$$

7·38. நாணின் நுனிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் அந் நாணைச் சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டத்தின்மேல் சந்திக்கும்



படம் 79.

நீள்வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

நாண் QR-இன் சமன்பாடு $y = mx + C$ (1) என்போம்.

Q, R புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(x_1, y_1)$ எனக் கொள்வோம்.

T புள்ளியிலிருந்து வரையப்படும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண் QR ஆதலின், அதன் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கு மாதலின்,

$$m = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}.$$

(அ - து) (x_1, y_1) புள்ளி $y = -\frac{b^2}{a^2 m}x$ என்ற கோட்டின் மீதமையும்.

இக் கோடு நாண் QR, மற்றும் அதற்கு இணையாக உள்ள நாண்களை இரு சமமாகப் பிரிக்கும் விட்டமாகும்.

7·39. துணையிய விட்டங்கள் இரண்டும் சமமெனில் அவை துணையியச் சம விட்டங்கள் எனப்படும் (Equiconjugate Diameters)

துணையிய விட்டங்கள் இரண்டின் நுனிகள் P, Q எனக் கொள்வோம்.

P-யின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta, b\sin\theta)$.

Q-வின் ஆயத்தொலைகள் $(-a\sin\theta, b\cos\theta)$.

துணையிய விட்டங்கள் சமமெனில்,

$$CP = CQ$$

$$\therefore\ CP^2 = CQ^2$$

$$CP^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta$$

$$CQ^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$$\therefore\ a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$$\therefore\ (a^2-b^2)(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0.$$

(அ-து) $(a^2-b^2)\cos 2\theta = 0.$

$a \neq b$, $\therefore \cos 2\theta = 0.$

(அ-து) $2\theta = \frac{\pi}{2}$ (அ-து) $\frac{3\pi}{2}$.

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{4}$ (அ-து) $\frac{3\pi}{4}$.

எனவே, P, Q-வின் ஆயத்தொலைகள் முறையே,

$$\left(a\cos\frac{\pi}{4},\ b\sin\frac{\pi}{4}\right),\ \left(-a\sin\frac{\pi}{4},\ b\cos\frac{\pi}{4}\right).$$

(அ-து) $\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$. $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}},\ \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$.

$\therefore$ CP-யின் சமன்பாடு $y = \frac{b}{a}x$.

CQ-வின் சமன்பாடு $y = -\frac{b}{a}x$.

துணையியச் சம விட்டங்கள் CP, CQ-வின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0.$$

(அ - து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

மாதிரி 21 : துணையிய விட்டங்கள் சமமெனின், அவை களிக்கிடையேயுள்ள குறுங்கோணம் மிகச் சிறியது என நிறுவுக.

C நீள் வட்ட மையம்,

CP, CQ துணையிய அரை விட்டங்கள் எனின்,

P, Q புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ ஆகும்.

CP கோட்டின் சரிவு,

$$m_1 = \frac{b\sin\theta - 0}{a\cos\theta - 0} = \frac{b\cdot\sin\theta}{a\cdot\cos\theta}$$

CQ கோட்டின் சரிவு,

$$m_2 = \frac{b\cos\theta - 0}{-a\sin\theta - 0} = -\frac{b\cos\theta}{a\sin\theta}$$

CP, CQ கோடுகளின் இடைப்பட்ட கோணம் ϕ எனின்,

$$\tan\phi = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

$$= \frac{\dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta} + \dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}}{1 + \dfrac{b\sin\theta}{a\cos\theta}\cdot\dfrac{b\cos\theta}{a\sin\theta}}$$

$$= \frac{ab\sin^2\theta + ab\cos^2\theta}{a^2\sin\theta\cos\theta + b^2\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{ab(\sin^2\theta + \cos^2\theta)}{(a^2 - b^2)\sin\theta\cos\theta}$$

$$= \frac{2ab}{(a^2 - b^2)\sin 2\theta)}.$$

$\sin 2\theta$-வின் மதிப்பு மீப் பெரியதெனின் ϕ-இன் மதிப்பு மீச் சிறியதாகும். $\sin 2\theta$-வின் மீப் பெரும் மதிப்பு 1 ஆதலின்,

$$2\theta = \frac{\pi}{2} \quad (\text{அ - து}) \quad \theta = \frac{\pi}{4}.$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனின், ϕ-யின் மதிப்பு மீச் சிறியதாகும் (minimum).

$$CP^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta.$$

$$CQ^2 = a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta.$$

$\theta = \frac{\pi}{4}$ எனின்,

$$CP^2 = a^2\cos^2\frac{\pi}{4} + b^2\sin^2\frac{\pi}{4} = \frac{a^2}{2} = \frac{b^2}{2}.$$

$$CQ^2 = a^2\sin^2\frac{\pi}{4} + b^2\cos^2\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{2} + \frac{b_2}{2}.$$

எனவே, $\theta = \frac{\pi}{4}$ எனின்,

$$CP = CQ.$$

(அ-து) துணையிய விட்டங்கள் சமம்.

$$\tan\phi = \frac{2ab}{(a^2-b^2)\sin 2\theta}.$$

இதில் $\theta = \frac{\pi}{4}$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\tan\phi = \frac{2ab}{a^2-b^2}.$$

எனவே, துணையிய விட்டங்களின் இடைப்பட்ட குறுங் கோணத்தின் மீச்சிறு மதிப்பு

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{2ab}{a^2-b^2}\right).$$

மாதிரி 22 : CP, CQ என்பவை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள் எனின், PQ நாணின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் $\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}=2$ நீள் வட்டத்தின் மேல் சந்திக்கும் என நிறுவுக.

P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ என்க.

PQ நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின்,

$$x_1 = \frac{a(\cos\theta-\sin\theta)}{2}.$$

$$y_1 = \frac{b(\sin\theta+\cos\theta)}{2}.$$

(அ-து) $$\frac{2x_1}{a} = \cos\theta - \sin\theta.$$

$$\frac{2y_1}{b} = \cos\theta + \sin\theta.$$

இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\frac{4x_1^2}{a^2} + \frac{4y_1^2}{b^2} = (\cos\theta - \sin\theta)^2 + (\cos\theta + \sin\theta)^2 = 2.$$

(அ-து) $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = \frac{1}{2}$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}.$$

மீண்டும்,

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1.$$

Q புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$-\frac{x}{a}\sin\theta + \frac{y}{b}\cos = 1.$$

இவைகளிரண்டும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி, இவைகளின் சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-வை நீக்கின் கிடைக்கப்பெறும்.

இவை இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\left(\frac{x}{a}\cos + \frac{y}{b}\sin\theta\right)^2 + \left(-\frac{x}{a}\sin\theta + \frac{y}{b}\cos\theta\right)^2 = 1 + 1.$$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$.

எனவே, P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2$$

என்ற நீள் வட்டத்தின்மீது வெட்டிக் கொள்கின்றன.

மாதிரி 23 : நீள் வட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டங்களை விட்டங்களாகக் கொண்ட வட்டங்களின் இரண்டாவது வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

நீள் வட்டம் $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

CP, CQ துணையிய அரை விட்டங்கள் எனக் கொள்வோம்.

$C(0, 0)$, $P(a\cos\theta, b\sin\theta)$, $Q(-a\sin\theta, b\cos\theta)$.

CP-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0)(x-a\cos\theta)+(y-0)(y-b\sin\theta)=0.$$

(அ-து) $x^2+y^2-ax\cos\theta-by\sin\theta=0$ ... (1)

CQ-ஐ விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$(x-0)(x+a\sin\theta)+(y-0)(y-b\cos\theta)=0.$$

(அ-து) $x^2+y^2+ax\sin\theta-by\cos\theta=0$ ... (2)

வட்டங்கள் (1), (2) வெட்டும் இரண்டாவது புள்ளியின் இயங்கு வழி பெற, அச் சமன்பாடுகளிலிருந்து θ-ஐ நீக்க வேண்டும்.

(1)-இலிருந்து $x^2+y^2=(xa\cos\theta+yb\sin\theta)$,

(2)-இலிருந்து $x^2+y^2=(yb\cos\theta-xa\sin\theta)$.

இவை இரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2.$$

∴ வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$a^2x^2+b^2y^2=2(x^2+y^2)^2.$$

மாதிரி 24 : $y=mx+\sqrt{\frac{1}{2}(a^2m^2+b^2)}$ எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தை வெட்டும் புள்ளிகளை நீள் வட்ட மையத்துடன் சேர்க்கும் கோடுகள் துணையிய அரை விட்டங்கள் என நிறுவுக.

$y=mx+\sqrt{\frac{1}{2}(a^2m^2+b^2)}$ ... (1)

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (2)

கோடு (1), நீள்வட்டம் (2)-ஐ P, Q புள்ளிகளில் வெட்டு கிறது எனக் கொள்வோம்.

நீள் வட்ட மையம் C ஆதியாதலின், CP, CQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு பெற, சமன்பாடு (2)-ஐச் சமன்பாடு (1)-ஆல் சமபடித்தான சமன்பாடாக மாற்ற வேண்டும்.

∴ CP, CQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\left[\frac{y-mx}{\sqrt{\frac{1}{2}(a^2m^2+b^2)}}\right]^2.$$

(அ-து) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{(y-mx)^2}{\frac{1}{2}(a^2m^2+b^2)}.$$

(அ-து) $$x^2\left[\frac{1}{a^2}-\frac{2m^2}{a^2m^2+b^2}\right]-\frac{4mxy}{a^2m^2+b^2}+y^2\left[\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a^2m^2+b^2}\right]=0.$$

CP, CQ கோடுகளின் சரிவு m_1, m_2 எனில்,

$$m_1m_2=\frac{\frac{1}{a^2}-\frac{2m^2}{a^2m^2+b^2}}{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{a^2m^2+b^2}}$$

$$=\frac{b^2(a^2m^2+b^2-2a^2m^2)}{a^2(a^2m^2+b^2-2b^2)}$$

$$=\frac{b^2[b^2-a^2m^2]}{a^2[a^2m^2-b^2]}$$

$$=-\frac{b^2(a^2m^2-b^2)}{a^2(a^2m^2-b^2)}$$

$$=-\frac{b^2}{a^2}.$$

எனவே, CP, CQ துணையிய விட்டங்களாகும்.

மாதிரி 25 : CP, CQ இரு துணையிய விட்டங்களெனின், P, Q புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$2(a^2x^2+b^2y^2)^3 = (a^2-b^2)(b^2y^2-a^2x^2)^2$$ என நிறுவுக.

P, Q புள்ளிகள் துணையிய விட்டங்களின் நுனிகளாதலின் அவைகள்தம் ஆயத்தொலைகள் $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$, $(-a\sin\theta,\ b\cos\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

P-யிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2-b^2 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

Q-யிடத்துச் செங்கோடு

$$-\frac{ax}{\sin\theta} - \frac{by}{\cos\theta} = a^2-b^2 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து θ-ஐ நீக்கின் செங்கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி கிடைக்கப் பெறும்.

(1)-இலிருந்து

$$ax\sin\theta - by\cos\theta = (a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta \quad \dots \quad (3)$$

(2)-இலிருந்து

$$-ax\cos\theta - by\sin\theta = (a^2-b^2)\sin\theta\cos\theta \quad \dots \quad (4)$$

(3)-இலிருந்து (4)-ஐக் கழிப்பின்,

$$ax(\sin\theta+\cos\theta) + by(\sin\theta-\cos\theta) = 0.$$

(அ - து) $\sin\theta\,(ax+by) + \cos\theta\,(ax-by) = 0.$

(அ - து) $(ax+by)\sin\theta = (by-ax)\cos\theta.$

$$\therefore \quad \frac{\sin\theta}{by-ax} = \frac{\cos\theta}{by+ax} = \frac{1}{\sqrt{(by-ax)^2+(by+ax)^2}}.$$

$$\therefore \quad \sin\theta = \frac{by-ax}{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}.$$

$$\cos\theta = \frac{by+ax}{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}.$$

இதைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{ax\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}{by+ax} - \frac{by\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}}{by-ax} = a^2-b^2.$$

(அ - து) $\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}\left[\frac{ax}{by+ax} - \frac{by}{by-ax}\right] = a^2-b^2.$

(அ - து) $\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}\left[-\frac{(a^2x^2+b^2y^2)}{b^2y^2-a^2x^2)}\right] = a^2-b^2.$

(அ - து) $\{\sqrt{2(a^2x^2+b^2y^2)}\}\ \{a^2x^2+b^2y^2\} = (a^2-b^2)(a^2x^2-b^2y^2).$

இதை வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$2(a^2x^2+b^2y^2)^3 = (a^2-b^2)^2(a^2x^2-b^2y^2)^2.$$

பயிற்சி 7.3.

1. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ நீள் வட்டத்தில் $4x-5y=0$ என்ற விட்டத்தின் துணையிய விட்டத்தின் நுனிகளைக் காண்க.

2. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தில் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகளைச் சேர்க்கும் கோடு $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ எனின், $a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha = 2p^2$ என நிறுவுக.

3. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத் துணையிய அரை விட்டங்களைச் சேர்க்கும் கோடு $lx+my+n=0$ எனின், $a^2l^2+b^2m^2=2n^2$ என நிறுவுக.

4. துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகள் P, Q எனின், நீள் வட்ட மையத்திலிருந்து நாண் PQ-வுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இயங்கு வழிச் காண்க.

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள் PCP', QCQ'. P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு QCQ'-ஐ R-இல் வெட்டினால், $CQ.PR$ ஒரு மாறிலி எனவும், Rஇன் இயங்கு வழி $\frac{a^2}{x^2} + \frac{b^2}{y^2} = \left(\frac{a^2 - b^2}{x^2 + y^2}\right)^2$ எனவும் நிறுவுக.

6. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள் $x^2 + y^2 = r^2$ வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுகின்றன எனின், PQ-வின் நடுப்புள்ளியின் இயங்குவழி

$$a^2[(x^2+y^2)^2 - r^2x^2] + b^2[(x^2+y^2)^2 - r^2y^2] = 0$$

என நிறுவுக.

7. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகளைச் சேர்க்கும் கோடு, ஆதியை மையமாகக் கொண்ட மற்றொரு நீள் வட்டம் என நிறுவுக.

8. P, Q புள்ளிகள் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகள். C நீள் வட்டமையமெனின், CPQ முக்கோணத்தின் குத்துக்கோட்டுச் சந்தியின் (orthocentre) இயங்கு வழிக் காண்க.

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தின் பேரச்சுத் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகளிடத்து ஏற்கும் கோணங்கள் θ, ϕ எனில், $\tan^2\theta + \tan^2\phi$ ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

10. நீள் வட்டத்தின் P புள்ளியிலிருந்து துணையியச் சமவிட்டங்களுக்கு வரையும் குத்துக்கோடுகள் PL, PM எனின், P புள்ளியிலிருந்து அதன் இசைக்கோட்டிற்கு வரையும் குத்துக்கோடு LM-ஐ இரு சமமாகப் பிரிக்கும் என நிறுவுக.

11. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்துத் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகள் P, Q எனின், $(SP - SQ)^2 = PQ^2 - 2b^2$ என நிறுவுக [S குவியங்களுள் ஒன்று].

12. PCP', QCQ' என்பவை $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய விட்டங்கள். $x^2+y^2=r^2$ வட்டத்தில் R யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$PR^2+QR^2+P'R^2+Q'R^2=2\,(a^2+b^2+2r^2)$$ என

நிறுவுக.

13. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் மையம் C. P, Q நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள இரு புள்ளிகள். P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு CQ கோட்டிற்குத் துணையியக் கோடெனின், Q புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு CP-யிக்குத் துணையியக் கோடு என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தில் PCP', QCQ' இரு துணையிய விட்டங்கள். CP, CQ'-இன் நீட்டல் இயங்கு வரையை L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால் CLM முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டுச் சந்தி (அ - து) செங்கோட்டு மையம் (orthocentre), குவியம் $(ae, 0)$ என நிறுவுக.

15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் துணையிய அரை விட்டங்களின் நுனிகள் P, Q. இப் புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் பேரச்சை முறையே L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால், $PL^2+QM^2=a^2(1-e^2)(2-e^2)$ என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $\left(\frac{5}{\sqrt{2}}, -\frac{4}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(-\frac{5}{\sqrt{2}}, \frac{4}{\sqrt{2}}\right)$.

4. $2(x^2+y^2)^2=a^2x^2+b^2y^2$.

8. $2(a^2x^2+b^2y^2)^2=(a^2-b^2)^2(b^2y^2-a^2x^2)^2$.

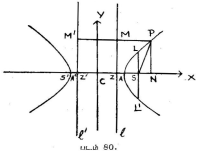
8. அதிபரவளைவு

(The Hyperbola)

8·1. அதிபரவளைவு—வரையறை

ஒரு கூம்பு வெட்டியின் மையத்தொலை விகிதம் $e > 1$ எனின், அக்கூம்பு வெட்டி ஓர் அதிபரவளைவாகும்.

8·2. அதிபரவளைவின் சமன்பாடு—நியமவடிவம்



படம் 80.

குவியம் S, இயக்குவரை l, மையத்தொலை விகிதம் e எனக் கொள்வோம்.

S புள்ளியிலிருந்து இயக்கு வரை l-க்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. SZ கோட்டை $e : 1$ விகிதத்தில் பிரிக்கவும். $e > 1$ ஆதலின் SZ கோடு குறித்த விகிதத்தில் உள்ளும் புறமும்

இரு புள்ளிகளில் பிரிக்கப்படும். உள்ளும் புறமும் பிரிக்கும் புள்ளிகள் முறையே A, A' என்போம்.

AA' கோட்டை C புள்ளியில் இரு சமபாகமாகப் பிரிக்கவும். $AA' = 2a$ எனின், $CA = CA' = a$.

வரையறையின்படி A, A' புள்ளிகள் அதிபரவளைவின் மீதமையும்.

$$\frac{SA}{AZ} = e = \frac{SA'}{A'Z}.$$

$$\therefore \; SA = e.AZ \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$SA' = e.A'Z \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$SA + SA' = e\,(AZ + A'Z).$$

(அ - து) $(CS - CA) + (CS + CA') = e.2a.$

$$\therefore \; 2CS = 2ae.$$

(அ - து) $CS = ae.$

$$SA' - SA = e\,(A'Z - AZ).$$

(அ - து) $2a = e\,[(A'C + CZ) - (CA - CZ)]$

$$= e\,[2\,CZ] \quad (\because \; CA = A'C).$$

$$\therefore \; CZ = \frac{a}{e}.$$

CZ கோட்டை x ஆயமாகவும், CZ-க்குச் செங்குத்தாக C வழிச் செல்லும் கோட்டை y ஆயமாகவும் கொள்வோம்.

எனவே, C, S, Z புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$(0, 0), \; (CS, 0), \; (CZ, 0).$$

(அ - து) $(0, 0), \; (ae, 0), \; \left(\frac{a}{e}, 0\right).$

அதிபரவளைவின் மீது $P(x_1, y_1)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$\frac{SP}{PM} = e\ (>1)$$

[PM கோடு, இயக்கு வரை l-க்குச் செங்குத்து].

$$\therefore\ SP^2 = e^2.PM^2.$$

$$SP^2 = (x_1-ae)^2 + y_1^2.$$

$$PM^2 = ZN^2 = (CN-CZ)^2 = \left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2.$$

$$\therefore\ (x_1-ae)^2+y_1 = e^2\left(x_1 - \frac{a}{e}\right)^2.$$

(அ - து) $x_1^2+a^2e^2-2x_1ae+y_1^2 = e^2x_1^2+a^2-2x_1ae;$

$$x_1^2(1-e^2)+y^2 = a^2(1-e^2).$$

(அ - து) $x_1^2(e^2-1)-y_1^2 = a^2(e^2-1).$

இருபக்கமும் $a^2(e^2-1)$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$-இன் இயங்கு வழி

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$$

$b^2 = a^2(e^2-1)$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$\therefore$ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

8·3. அதிபரவளைவின் தன்மைகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(i) சமன்பாடு x, y ஆயங்களுடன் சமச்சீர் உடையதாயிருப்பதால் (x_1, y_1) புள்ளி அதிபரவளைவின் மீதிருப்பின், $(-x_1, -y_1)$, $(x, -y_1)$, $(-x_1, y_1)$ புள்ளிகளும் வளைவின் மீதமையும்.

(ii) (x_1, y_1), $(-x_1, -y_1)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு ஆதி $C(0, 0)$ வழிச் செல்வதால், C வழிச் செல்லும் அனைத்து நாண்களையும் C புள்ளி இரு சமமாகப் பிரிக்கும். C அதிபரவளைவின் மையம் எனப்படும்.

(iii) x ஆயத்தை அதிபரவளைவு $A(a, 0)$, $A'(-a, 0)$ புள்ளிகளில் சந்திக்கிறது, A, A' அதிபரவளைவின் முனைகள் எனப்படும்.

சமன்பாட்டில் $x = 0$ எனப்பிரதியிடின்,

$$y^2 = -b^2 \text{ என்றுகும்.}$$

(அ-து) $y = \pm\sqrt{-b^2}$.

எனவே, அதிபரவளைவு y ஆயத்தை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது. (அ-து) வளைவு y ஆயத்தைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் தான் வெட்டும்.

y ஆயத்தின்மீது B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = b$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குறிக்கவும்.

AA' கோடு, அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு (transverse axis) எனவும், BB' கோடு, அதிபரவளைவின் துணை அச்சு (conjugate axis) எனவும் கூறப்படுகின்றன. குறுக்கச்சு, துணை அச்சின் நீளங்கள் முறையே $2a$, $2b$ ஆகும்.

(iv) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore \quad x^2 = a^2\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right).$$

(அ - து) $$x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}.$$

எனவே, y-இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும், x மெய் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும். y-இன் மதிப்பு அதிகரித்துக் கந்தழியை நெருங்கின், x-இன் மதிப்பும் அதிகரித்துக் கந்தழியை நெருங்கும்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$\therefore \quad y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

$x^2 > a^2$ எனின், y மெய் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

$x^2 < a^2$ எனின், y-இன் மதிப்புக் கற்பனையாகும்.

(அ-து) $a, -a$ மதிப்புக்களுக் கிடைப்பட்ட x-இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும், y-யின் மதிப்புக் கற்பனையாகும். எனவே, A புள்ளிக்கு இடமும், A' புள்ளிக்கு வலமும் வளைவு இருக்காது. (அ-து) A, A' புள்ளிகளுக்கிடையே அதிபரவளைவு இருக்காது.

$\therefore$ அதிபரவளைவு தம்முள் வெட்டிக் கொள்ளாத இரு பிரிவுகள் கொண்டதாகும். ஒரு பகுதி A'-க்கு இடமும், மற்றொரு பகுதி A-யிக்கு வலமும் இருக்கும். ஒவ்வொரு பிரிவும் படத்தில் காட்டியுள்ளபடி கந்தழியை நெருங்கும்.

குவியத்தின் ஆயத் தொலைகள் $(ae, 0)$, இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x = \frac{a}{e}$ ஆகும்.

8·4. இரண்டாவது குவியம், இயக்குவரை

CA' கோட்டின்மீது, [படம் 80, பத்தி 8·2] S', Z' புள்ளிகளை முறையே $CS = CS' = ae$, $CZ = CZ' = \frac{a}{e}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

CA' கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக Z' வழி $Z'M'$ கோடு வரையவும். $Z'M'$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாக PM' கோடு வரைக.

S' புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(-ae, 0)$.

$$PM' = NZ' = CN + CZ' = x + \frac{a}{e}.$$

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$

(அ-து) $(e^2-1)x^2 - y^2 = a^2(e^2-1).$

(அ-து) $x^2e^2 - x^2 - y^2 = a^2e^2 - a^2.$

(அ-து) $x^2 + y^2 + a^2e^2 = a^2 + e^2x^2.$

இரு பக்கமும் $2aex$-ஐக் கூட்டின்,

$$(x^2 + 2aex + a^2e^2) + y^2 = e^2x^2 + 2aex + a^2$$
$$= e^2\left[x^2 + \frac{2ax}{e} + \frac{a^2}{e^2}\right].$$

(அ-து) $(x+ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \frac{a}{e}\right)^2$ ... (1)

$P(x, y)$ அதிபரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$S'P^2 = (x + ae)^2 + y^2;$$

$$PM'^2 = \left(x + \frac{a}{e}\right)^2$$

எனவே, சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$S'P^2 = e^2.PM^2$$

(அ-து) $\frac{S'P}{PM} = e.$

(அ-து) அதிபரவளைவின் மீதுள்ள P என்ற யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்கு S' புள்ளியிலிருந்து உள்ள தூரம், $Z'M'$ கோட்டிலிருந்து Pயின் தூரத்தின் e மடங்காகும்.

எனவே, வரையறையின்படி S', $Z'M'$ என்பவை முறையே குவியம், இயக்குவரை ஆகின்றன. ஆனால் குவியம் S எனவும், இயக்குவரை ZM எனவும் நாம் முன்னர்க் கண்டோம்.

ஆகவே, S' இரண்டாவது குவியம் எனவும், $Z'M'$ கோடு இரண்டாவது இயக்குவரை எனவும் கூறப்படுகின்றன.

இரண்டாவது குவியம் S'-இன் ஆயத்தொலைகள் $(-ae, 0)$.

இரண்டாவது இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $x = -\frac{a}{e}$.

8·5. செவ்வகலம் (Latus Rectum)

குவியம் S'-இன் வழியாகக் குறுக்கச்சுக்குச் செங்குத்தாக வரையப்படும் கோடு அதிபரவளைவை L, L' புள்ளிகளில் வெட்டினால், LSL' எனும் நாண் அதிபரவளைவின் செவ்வகலம் எனப்படும்.

L புள்ளியின் x ஆயத்தொலை

$= S$ புள்ளியின் x ஆயதொலை

$= ae.$

L புள்ளியின் நிலைத்தூரம் (ordinate) SL ஆதலின், அப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (ae, SL).

L புள்ளி அதிபரவளைவின் மீதிருப்பதால்,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{SL^2}{b^2} = 1$$

(அ - து) $SL^2 = b^2(e^2-1)$

$$= b^2 \cdot \frac{b^2}{a^2} \qquad [\because a^2(e^2-1) = b^2].$$

$$\therefore \quad SL = \frac{b^2}{a}.$$

எனவே, செவ்வகல நீளம் $LSL' = 2\,SL = 2\frac{b^2}{a}$.

8·6. அதி பரவளைவின் மீதுள்ள புள்ளியின் குவியத் தூரங்களின் வேறுபாடு ஒரு மாறிலியாகும்

அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

குவியங்கள் $S(ae, 0)$; $S'(-ae, 0)$.

வளைவின்மீது $P(x, y)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்.

வரையறையின்படி,

$$\frac{SP}{PM} = e = \frac{S'P}{PM'}.$$

(அ-து) $SP = e.PM = e.NZ$ [படம் 80, பத்தி 8·2]

$$= e(CN - CZ)$$

$$= e\left(x - \frac{a}{e}\right) = ex - a.$$

$$S'P = e.PM' = e(NZ')$$

$$= e(CN + CZ')$$

$$= e\left(x + \frac{a}{e}\right) = ex + a.$$

$\therefore \quad S'P \sim SP = (ex + a) - (ex - a)$

$$= 2a$$

= ஒரு மாறிலி (குறுக்கச்சின் நீளம்).

8.7. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் நிலை

குறித்த புள்ளி $P(x_1\ y_1)$-இலிருந்து அதி பரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் குறுக்கச்சிற்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும்.

இஃது அதிபரவளைவை Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

Q புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, NQ).

$$\therefore \quad \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{NQ^2}{b^2} = 1.$$

(அ-து) $NQ = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}.$

P புள்ளி அதிபரவளைவின் வெளியே, மேலே அல்லது உள்ளே இருப்பதற்குத் தக்கவாறு

$$NP > = < NQ \text{ ஆகும்.}$$

(அ-து) $$y_1 > = < \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}.$$

$$y_1^2 > = < b^2\left[\frac{x_1^2}{a^2} - 1\right].$$

(அ-து) $$\frac{y_1^2}{b^2} > = < \frac{x_1^2}{a^2} - 1.$$

(அ-து) $$1 > = < \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

(அ-து) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < = > 1.$$

(அ-து) $$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < = > 0.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளி

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} < 1$ எனின், வளைவின் வெளியேயும்,

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ எனின், வளைவின் மேலும்,

$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} > 1$ எனின், வளைவின் உள்ளேயும்

இருக்கும்.

மாதிரி 1 : அதி பரவளைவு ஒன்றின் குவியம் $(2, 1)$, ஒத்த இயக்கு வரை $2x + 3y - 1 = 0$, மையத் தொலை விகிதம் $e = 2$ எனின், அதன் சமன்பாடு காண்க.

அதி பரவளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனின்,

குவியம் $S(2, 1)$-இலிருந்து P புள்ளிக்கு உள்ள தூரம்

$$SP = \sqrt{(x_1-2)^2 + (y_1-1)^2}.$$

$2x + 3y - 1 = 0$ இயக்கு வரையிலிருந்து P-யிக்குள்ள தூரம்

$$PM = \frac{2x_1 + 3y_1 - 1}{\pm\sqrt{4+9}}.$$

வரையறையின் படி,

$$SP + e.PM.$$

$$\therefore \quad SP^2 = e^2 . PM^2.$$

$$(\text{அ-து}) \quad (x_1-2)^2 + (y_1-1)^2 = 4 . \frac{(2x_1+3y_1-1)^2}{13}.$$

$$\therefore \quad 13[x_1^2+y_1^2-4x_1-2y_1+5] = 4[4x_1^2+9y_1^2+1+12x_1y_1-4x_1-6y_1].$$

$$(\text{அ-து}) \quad 3x_1^2+48x_1y_1+23y_1^2+36x_1+2y_1-61=0.$$

எனவே, $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இயங்குவழி (அ-து) அதிபரவளை -வின் சமன்பாடு

$$3x^2+48xy+23y^2+36x+2y-61=0.$$

மாதிரி 2 : $9x^2-16y^2=144$ அதிபரவளைவின் அச்சுக்களின் நீளம், மையம், குவியங்கள், மையத்தொலை விகிதம், செவ்வகலத்தின் நீளம் ஆகியவை காண்க.

$$9x^2-16y^2=144.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1.$$

எனவே, குறுக்கச்சின் நீளம் $2a = 2 . 4 = 8$.

துணை அச்சின் நீளம் $2b = 2 . 3 = 6$.

மையம் $(x=0, y=0)$. (அ-து) $(0, 0)$.

மையத் தொலை விகிதம் e, பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

$$b^2 = a^2(e^2-1).$$

$$9 = 16\,(e^2-1).$$

$$\therefore\ e^2 - 1 = \frac{9}{16}.$$

$$\therefore\ e^2 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}.$$

(அ - து) $e = \frac{5}{4}$.

குவியங்கள் $(ae, 0)$, $(-ae, 0)$.

(அ - து) $(5, 0)$, $(-5, 0)$.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{2b^2}{a} = 2 \cdot \frac{9}{4} = \frac{9}{2}$.

8·8. அதிபரவளையின் சமன்பாடு, நீள் வட்டத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து b^2-இன் குறியில் மட்டும் வேறுபட்டுள்ளது. எனவே, நீள் வட்டத்திற்குப் பொருந்தும் பல்வேறு முடிவுகள் b^2-க்குப் பதில் $-b^2$ எனப் பிரதியிடின் அதிபரவளைவுக்கும் பொருந்தும்.

கீழ்க்காணும் முடிவுகள் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளன.

அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவுக்கு

(i) $y = mx + c$ கோடு, தொடு கோடாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$c = \sqrt{a^2m^2 - b^2} \qquad \text{[பத்தி 7·10].}$$

(ii) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \text{[பத்தி 7·11].}$$

(iii) $lx + my + n = 0$ கோடு, தொடு கோடாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$$ [அத்தியாயம் 7-மாதிரி 5(a)].

(iv) $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ தொடு கோடெனில், தேவையான கட்டுப்பாடு

$$p^2 = a^2 \cos^2\alpha - b^2 \sin^2\alpha$$ [பயிற்சி 7.1-(21)].

(v) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{a^2x}{x_1} + \frac{b^2y}{y_1} = a^2 + b^2$$ [பத்தி 7·14].

(vi) குத்துத் தொடு கோடு வட்டம்

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2$$ [அத்தியாயம் 7-மாதிரி 4].

(vii) துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = a^2$$ [பத்தி 7·15].

(viii) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடு நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$ [பத்தி 7·26].

(ix) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1$$ [பத்தி 7·32].

(அ-து) $$\left[\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1\right]^2 = \left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right]\left[\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right].$$

(x) (x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு

$$T = S_1.$$

(அ-து, $$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$ [பத்தி 7·33].

(xi) (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1$$ [பத்தி 7·27].

(xii) $l_1x + m_1y + n_1 = 0, \ \ l_2x + m_2y + n_2 = 0$

துணையியக் கோடுகளாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$a^2 l_1 l_2 - b^2 m_1 m_2 = n_1 n_2$$ [பத்தி 7·31].

(xiii) $lx + my + n = 0$ கோட்டின் இசைப்புள்ளி

$$-\frac{a^2 l}{n}, \ +\frac{b^2 m}{n}$$ [பத்தி 7·28].

(xiv) $y = m_1x, \ y = m_2x$ கோடுகள் துணையிய விட்டங்களாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}$$ [பத்தி 7·36].

8·9. அதிபரவளைவின் துணையிய விட்டங்கள் இரண்டில் ஒன்று மட்டும் வளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும்

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

அதிபரவளைவு (1)-இன் துணையிய விட்டங்கள்

$y = m_1x, \ y = m_2x$ எனின்,

$$m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}.$$

$y = m_1x$ விட்டம் அதிபரவளைவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளைப் பின் வரும் சமன்பாட்டின் மூலம் பெறலாம்.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(m_1 x)^2}{b^2} = 1.$$

(அ - து) $x^2 = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m_1^2}$.

$$\therefore \quad x = \pm \frac{ab}{\sqrt{b^2 - a^2 m_1^{\,2}}} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்வாறே, $y = m_2 x$ விட்டம் அதிபரவளைவு ( )-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகள்

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 m_2^{\,2}}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 \left(\frac{b^4}{a^4 m_1^{\,2}} \right)}$$

$$= \frac{a^4 b^2 m_1^{\,2}}{a^2 b^2 m_1^{\,2} - b^4}$$

$$= \frac{a^4 m_1^{\,2}}{a^2 m_1^{\,2} - b^2}.$$

$$\therefore \quad x = \pm \frac{a^2 m_1}{\sqrt{a^2 m_1^{\,2} - b^2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$a^2 m^2 - b^2 > 0$ எனின், $y = m_2 x$ அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளிலும், $y = m_1 x$ அவ்வளைவைக் கற்பனைப்புள்ளிகளிலும் வெட்டும்.

$b^2 - a^2 m^2 > 0$ எனின், $y = m_1 x$ அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளிலும், $y = m_2 x$ அவ்வளைவைக் கற்பனைப் புள்ளிகளிலும் வெட்டும்.

எனவே, இரு துணையிய விட்டங்களில், ஒரு விட்டம் மட்டுமே அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டும்.

மாதிரி 3 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு குத்துத் தொடுகோடு வட்டத்தினை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டு மெனில், CP, CQ கோடுகள் துணையிய விட்டங்கள் என நிறுவுக.

அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் $x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad \ldots \quad (2)$

அதிபரவளைவு (1)-இன் தொடுகோடு

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 - b^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

தொடுகோடு (3), வட்டம் (2)-ஐ P, Q புள்ளிகளில் வெட்டினால், CP, CQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு, சமன்பாடு (2)-ஐச் சமன்பாடு (3)-இன் உதவியால் சமபடித்தானதாக மாற்றுவதன் மூலம் பெறலாம் (C அதிபரவளைவின் மையம்).

$\therefore$ CP, CQ கோடுகளின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 = (a^2 - b^2)\left(\frac{y - mx}{\sqrt{a^2m^2 - b^2}}\right)^2.$$

(அ-து) $(x^2+y^2)(a^2m^2-b^2) = (a^2-b^2)(y^2+m^2x^2-2mxy)$.

$$\therefore \ x^2(a^2m^2 - b^2 - a^2m^2 + b^2m^2) + 2m(a^2-b^2)xy + y^2(a^2m^2 - b^2 - a^2 + b^2) = 0.$$

(அ-து) $x^2b^2(m^2-1) + 2m(a^2-b^2)xy + y^2a^2(m^2-1) = 0$.

(அ-து) $$\frac{b^2}{a^2}x^2 + \frac{2m(a^2-b^2)}{a^2(m^2-1)}xy + y^2 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

CP, CQ கோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடுகள் $y = m_1x$, $y = m_2x$ எனின், அவைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(y - m_1x)(y - m_2x) = 0.$$

(அ-து) $m_1m_2x^2 - (m_1 + m_2)xy + y^2 = 0 \quad \ldots \quad (5)$

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ ஒப்பிடின்,

$$m_1m_2 = \frac{b^2}{a^2} \text{ ஆகும்.}$$

எனவே, CP, CQ துணையிய விட்டங்களாகும்.

மாதிரி 4: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியங்கள் S, S'-ஐச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்திற்கு அதிபரவளைவின் நாண் தொடுகோடெனில், அந் நாணின் அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளியின் இயங்கு வழிக் காண்க.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

அதன் குவியங்கள் S, S' எனின், அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே,

$$(ae, 0), \quad (-ae, 0).$$

SS' கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம்

$$(x-ae)(x+ae) + (y-0)(y-0) = 0.$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2 + y^2 = a^2e^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

அதிபரவளைவின் நாண் PQ எனவும், அந்நாணின் அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு (அ-து) PQ நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

நாண் PQ, வட்டம் (2)-இன் தொடுகோடெனின், வட்ட மையத்திலிருந்து PQ கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம், வட்ட ஆரத்திற்குச் சமம்.

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}}} = ae.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \frac{1}{a^2e^2}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2} \qquad [\because \; b^2 = a^2(e^2-1)].$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2+b^2}$$ எனும் நீள் வட்டமாகும்.

மாதிரி 5 : நிலைத்த புள்ளி ஒன்றின் வழிச் செல்லும் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

(x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் சமன்பாடு

$$T = S_1.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

இந்நாண் (α, β) என்ற நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லுமெனின்,

$$\frac{\alpha x_1}{a^2} - \frac{\beta y_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{x_1(x_1 - \alpha)}{a^2} - \frac{y_1(y_1 - \beta)}{b^2} = 0.$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$\frac{x(x - \alpha)}{a^2} - \frac{y(y - \beta)}{b^2} = 0.$$

மாதிரி 6 : அதிபரவளைவின் மையத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் நாண்களின் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட (1)-இன் நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$.

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} \quad \ldots \quad (2)$$

இந்நாண் (2) அதிபரவளைவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் P, Q எனக் கொள்வோம். அதிபரவளைவின் மையம் C எனின், CP, CQ கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \left(\frac{\dfrac{xx_1}{a^2} - \dfrac{yy_1}{b^2}}{\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}} \right)^2.$$

(அ-து) $$x^2\left[\frac{1}{a^2} - \frac{\dfrac{x_1^2}{a^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}\right] + \frac{\dfrac{2x_1y_1}{a^2b^2}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}xy$$

$$+ y^2\left[-\frac{1}{b^2} - \frac{\dfrac{y_1^2}{b^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}\right] = 0.$$

$\angle PCQ = 90^\circ$ ஆதலின்,

x^2-இன் கெழு $+ y^2$-இன் கெழு $= 0$.

$$\therefore \left\{\frac{1}{a^2} - \frac{\dfrac{x_1^2}{a^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}\right\}$$

$$+ \left\{\frac{1}{b^2} - \frac{\dfrac{y_1^2}{b^4}}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}\right\} = 0.$$

(அ-து) $$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \left(\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4}\right)\frac{1}{\left(\dfrac{x_1^2}{a^2} - \dfrac{y_1^2}{b^2}\right)^2}.$$

(அ-து) $$\frac{x_1^2}{a^4} + \frac{y_1^2}{b^4} = \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

பயிற்சி 8.1.

1. பின் வரும் அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

   (i) குவியம் (1, 2), ஒத்த இயக்குவரை $2x+y-1=0$, மையத் தொலை விகிதம் $\sqrt{3}$.

   (ii) குவியம் $(-1, -1)$, ஒத்த இயக்குவரை $x-y+1=0$, மையத் தொலை விகிதம் 2.

   (iii) குறுக்கச்சு, துணையச்சு நீளங்கள் முறையே 3, 4 அவைகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு $xy=0$.

   (iv) குவியங்களுக்கு இடையேயுள்ள தூரம் 16. மையத் தொலை விகிதம் $\sqrt{2}$.

2. $9x^2-16y^2+72x-32y-16=0$ என்ற அதிபரவளைவின் மையம், மையத் தொலை விகிதம், குவியங்கள், இயக்குவரைகள் காண்க.

3. $9x^2-16y^2-18x-64y+89=0$ என்ற அதிபரவளைவின் மையம், குவியங்கள் காண்க.

4. $9(3x-4y-12)^2-4(4x-3y-12)^2=900$ என்ற அதிபரவளைவின் மையம். குவியங்கள் காண்க.

5. $9x^2-16y^2-18x-64y-199=0$ என்ற அதிபரவளைவின் மையம், மையத் தொலை விகிதம், அச்சுக்களின் நீளங்கள் காண்க.

6. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் நாண் $x^2+y^2=c^2$ வட்டத்தின் தொடுகோடெனில், அந் நாணின் நடுப்புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)=c^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}\right)$$ என நிறுவுக.

7. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவைச் சார்ந்த $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடு நீள் வட்டத்தைத் தொடுமென நிறுவுக.

8. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு குறுக்கச்சை Q புள்ளியில் வெட்டுகிறது. இப் பரவளைவுக்கு P-யிடத்துச் செங்கோட்டின் மீது குவியங்கள் S, S'-இலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள் SL, $S'L'$ எனின், இவைகளின் இசை இடை (harmonic mean) PQ என நிறுவுக.

9. $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற வளைவின் மையம் C. இவ் வளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டை C-யிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடு L புள்ளியிலும், அதிபரவளைவை M புள்ளியிலும் வெட்டுகிறதெனின், $CL.CM = a^2$ என நிறுவுக.

10. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து $x^2 - y^2 = a^2$ என்ற வளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடு களின் தொடு நாண் LM எனின், அந் நாணின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி $(x^2 - y^2)^2 = a^2(x^2 + y^2)$ என நிறுவுக.

11. மையத்திலிருந்து d தொலைவிலுள்ள $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் நாண்கள்தம் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

12. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$ வளைவில் யாதேனும் ஒரு புள்ளியி லிருந்து $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$-க்கு வரையும் இரு தொடு கோடுகள் ஆயங்களுடன் நிரப்புக் கோணங்கள் (complementary angles) பிறப்பிக்கும் என நிறுவுக.

13. $x^2 + y^2 = a^2$ வட்டத்தின் நாண் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதி பரவளைவைத் தொடுமெனின், அந் நாணின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி $(x^2 + y^2)^2 = a^2x^2 - b^2y^2$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ நீள் வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில்

வெட்டுமெனின், PQ நாணின் நடுப் புள்ளியின் இயங்கு வழி $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$ என நிறுவுக.

15. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு துணையச்சை Q-வில் வெட்டுகிறது. S, S' அதிபரவளைவின் குவியங்களெனின், $\frac{SQ^2}{SP.S'P}$ ஒரு நிலையெண் என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (i) $7x^2+12xy-2y^2-2x+14y-22=0$;
   (ii) $x^2-4xy+y^2+2x-6y=0$; (iii) $16x^2-9y^2=36$; (iv) $x^2-y^2=32$
2. (i) $(-4,-1)$; $\frac{5}{4}$; $(1,-1)$; $(-9,-1)$; $5x+4=0$; $5x+36=0$.
3. $(1,-2)$, குவியங்கள் $(1,3)$, $(1,-7)$.
4. $\left(\frac{84}{25},\frac{-12}{25}\right)$; $\left(\frac{84+15\sqrt{13}}{25},\frac{-12+15\sqrt{13}}{25}\right)$;
   $\left(\frac{84-15\sqrt{13}}{25},\frac{-12-15\sqrt{13}}{25}\right)$.
5. $(1,-2)$; $\frac{5}{4}$; 8; 6.

11. $\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}=\frac{1}{d^2}$.

8·10. துணையலகுகள்

$(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ எனும் புள்ளி θ-இன் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற பரவளைவில் பொருந்தும். எனவே θ ஐத் துணையலகாகக் கொள்ளலாம்.

8·11 அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இல் θ, ϕ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$P(\theta)$, $Q(\phi)$ என்பவை அதிபரவளைவு மீதியிருக்கும் இரு புள்ளிகள் எனின், அவைகள்தம் ஆயத்தொலைகள் முறையே $(a \sec\theta,\ b\tan\theta)$, $(a\sec\phi,\ b\tan\phi)$.

$\therefore$ நாண் PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{y-b\tan\theta}{b\tan\theta-b\tan\phi} = \frac{x-a\sec\theta}{a\sec\theta-a\sec\phi}.$$

(அ-து) $$y-b\tan\theta = \frac{b(\tan\theta-\tan\phi)}{a(\sec\theta-\sec\phi)}(x-a\sec\theta)$$

$$= \frac{b\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}-\frac{\sin\phi}{\cos\phi}\right)}{a\left(\frac{1}{\cos\theta}-\frac{1}{\cos\phi}\right)}(x-a\sec\theta)$$

$$= \frac{b(\sin\theta\cos\phi-\cos\theta\sin\phi)}{a(\cos\phi-\cos\theta)}(x-a\sec\theta)$$

$$= \frac{b\sin(\theta-\phi)}{a(\cos\phi-\cos\theta)}(x-a\sec\theta)$$

$$= \frac{2b\sin\frac{\theta-\phi}{2}\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{2a\sin\frac{\theta+\phi}{2}\sin\frac{\theta-\phi}{2}}(x-a\sec\theta)$$

$$= \frac{b\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{a\sin\frac{\theta+\phi}{2}}(x-a\sec\theta).$$

(அ-து) $$ay\sin\frac{\theta+\phi}{2} - ab\tan\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$$

$$= bx\cos\frac{\theta-\phi}{2} - ab\sec\theta\cos\frac{\theta-\phi}{2}.$$

இரு பக்கமும் abஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}-\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$=\tan\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}-\sec\theta\cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

$$=\frac{1}{2\cos\theta}\left[2\sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}-2\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{2\cos\theta}\left[\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\cos\frac{\phi+3\theta}{2}-2\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\cos\theta}\left[\cos\frac{\phi+3\theta}{2}+\cos\frac{\theta-\phi}{2}\right]$$

$$=-\frac{1}{2\cos\theta}\left[2\cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\theta\right]$$

$$=-\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

$\therefore$ PQ நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}-\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\phi}{2}=-\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

(அ-து) $$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}.$$

8·12. $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ அதி பரவளைவில்}$$

$P(\theta)$, $Q(\phi)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\phi}{2}-\frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\phi}{2}=\cos\frac{\theta+\phi}{2}\quad\ldots(1)$$

$Q(\phi)$ புள்ளி, $P(\theta)$ புள்ளியை நெருங்கி முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும் போது PQ நாண் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-இல், $\phi = \theta$ எனப் பிரதியிடின் $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\cos\frac{\theta-\theta}{2} - \frac{y}{b}\sin\frac{\theta+\theta}{2} = \cos\frac{\theta+\theta}{2}.$$

(அ - து) $\frac{x}{a}\cos 0 - \frac{y}{b}\sin\theta = \cos\theta$

(அ - து) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\sin\theta = \cos\theta$

இரு பக்கமும் $\cos\theta$-ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{x}{a}\cdot\frac{1}{\cos\theta} - \frac{y}{b}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = 1.$$

(அ - து) $\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1.$

8·13. $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{அதிபரவளைவுக்கு}$$

$P(\theta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு,

$$\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1.$$

தொடுகோட்டின் சரிவு $= +\frac{b\sec\theta}{a\tan\theta}$.

எனவே, செங்கோட்டின் சரிவு $= -\frac{a\tan\theta}{b\sec\theta}$.

$\therefore$ $P(\theta)$ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$y - b\tan\theta = -\frac{a\tan\theta}{b\sec\theta}(x - a\sec\theta).$$

(அ-து) $by\sec\theta - b^2\sec\theta\tan\theta = -xa\tan\theta + a^2\tan\theta\sec\theta.$

(அ-து) $xa\tan\theta + by\sec\theta = (a^2+b^2)\sec\theta\tan\theta.$

இரு பக்கமும் $\sec\theta \tan\theta$-வால் வகுப்பின்,

$$\frac{xa}{\sec\theta} + \frac{by}{\tan\theta} = a^2+b^2.$$

8·14. தொலைத் தொடுகோடுகள் (Asymptotes)

முழுவதும் கந்தழியில் (infinity) இல்லாமல், ஆனால் அதிபர வளைவைக் கந்தழிப்புள்ளியில் (point at infinity) தொடும் கோடு, தொலைத்தொடு கோடு எனப்படும்.

8·15. தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$y = mx + c \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனும் கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

எனும் அதிபரவளைவை வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத்தொலைகள்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(mx+c)^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$(\text{அ-து}) \quad x^2\left[\frac{1}{a^2} - \frac{m^2}{b^2}\right] - \frac{2mcx}{b^2} - \left(\frac{c^2}{b^2}+1\right) = 0.$$

$$(\text{அ-து}) \quad x^2(b^2-a^2m^2) - 2mca^2x - a^2(b^2+c^2) = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$y = mx + c$, அதிபரவளைவு (2)-இன் தொலைத் தொடு கோடெனின், சமன்பாடு (4)-இன் தீர்வுகளின் மதிப்புக்கள் இரண்டும் கந்தழியாகும்.

$$\therefore \quad b^2 - a^2m^2 = 0, \quad mca^2 = 0.$$

எனவே, $m^2 = \frac{b^2}{a^2}, \quad c = 0.$

$\therefore$ தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$y = \pm\frac{b}{a}x.$$

(அ-து) $y = \frac{b}{a}x,\ y = -\frac{b}{a}x.$

(அ-து) $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0,\ \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ ... ... (5)

சமன்பாடுகள் (3), (5)-இலிருந்து அதி பரவளைவும், அதன் தொலைத் தொடு கோடுகளும் எண்ணுருப்பில் மட்டும் வேறு பட்டிருக்கும் என அறியலாம்.

8·16. $m = \pm \frac{b}{a},\ c \neq 0$ எனின்,

பத்தி 8·15-இல் சமன்பாடு (4)-இல், x^2-இன் கெழு மட்டும் பூச்சியமாகும்.

∴ சமன்பாடு (4)-இன் தீர்வுகளில் ஒன்று மட்டும் கந்தழியாகும்.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளுக் கிணையாக உள்ள கோடுகள் அதி பரவளைவை முடிவுள்ள புள்ளி (finite point) ஒன்றிலும், முடிவிலிப் புள்ளி (point at infinity) ஒன்றிலும் வெட்டும்.

8·17. தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

(அ-து) $y = \pm \frac{b}{a}x.$

இவைகள் ஆதிவழிச் செல்லும் கோடுகள். மேலும், x ஆயத்துடன் இவைகள் சமச் சாய்விலுள்ளதால், x ஆயம் இவைகளுக் கிடைப்பட்ட கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டியாகும்.

இவ்விரு தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் 2θ எனின்,

$$\tan\theta = \frac{b}{a}.$$

$$\therefore \quad \sec^2\theta = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2e^2}{a^2} = e^2.$$

$$\therefore \quad \sec\theta = e.$$

(அ-து) $\theta = \sec^{-1}(e)$.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் $2\sec^{-1}(e)$.

(அல்லது) $2\tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$.

8·18. ஆதியிலிருந்து அதிபரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்

அதிபரவளைவின் மையத்தில் (ஆதி)இருந்து $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. அதிபரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2 = SS_1.$$

$$\left(\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} - 1\right)^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1\right)$$

(அ-து) $1 = -\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1\right) \qquad \left[\because \begin{matrix} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{matrix}\right].$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0.$

இது தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடாகும்.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகள், மையத்திலிருந்து அதிபரவளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள் என வரையறுக்கலாம்.

8·19. அதிபரவளைவின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியிலிருந்து தொலைத் தொடுகோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் பெருக்குத் தொகை ஒரு மாறிலியாகும்.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தொலைத் தொடு கோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$$(\text{அ - து}) \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0, \quad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

அதிபரவளையின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $P(x_1, y_1)$ எனின், அப் புள்ளியிலிருந்து தொலைத் தொடு கோடுகளுக்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் நீளங்கள் முறையே,

$$\frac{\frac{x_1}{a} + \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}, \quad \frac{\frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b}}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}.$$

இவைகள்தம் பெருக்குத் தொகை

$$= \left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right)\frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

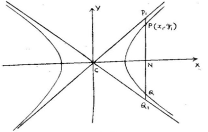
$$= \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \quad \left[\because \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1\right]$$

$$= \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$$

= ஒரு மாறிலி.

8·20. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **அதிபரவளையின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி P-யிலிருந்து குறுக்கச்சுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக்கோடு அதிபரவளையை Q புள்ளியிலும், தொலைத்தொடு கோடுகளை P', Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டினால், $PP'.QQ' = b^2$**

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனக்கொள்வோம். P புள்ளியிலிருந்து x ஆயத்திற்கு PN என்ற குத்துக்கோடு வரையவும். இது வளைவை மீண்டும் Q புள்ளியிலும், தொலைத்



படம் 81

தொடுகோடுகளை P', Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம்.

$$\therefore \quad CN = x_1, \quad NP = y_1 = \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

P' புள்ளி $y = \frac{b}{a}x$ என்ற தொலைத் தொடுகோட்டின்மீது அமைந்திருப்பதால், P' புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(x_1, \frac{b}{a}x_1\right).$$

$$\therefore \quad PP' = NP' - NP = \frac{b}{a}x_1 - \frac{b}{a}\sqrt{x_1^2 - a^2}$$

$$= \frac{b}{a}[x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}].$$

இவ்வாறே, $QQ' = \frac{b}{a}\,x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}]$.

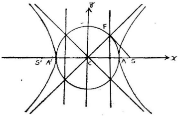
$$\therefore \quad PP'.QQ' = \frac{b}{a}[x_1 - \sqrt{x_1^2 - a^2}]\;\frac{b}{a}[x_1 + \sqrt{x_1^2 - a^2}]$$

$$= \frac{b^2}{a^2}[x_1^2 - (x_1^2 - a^2)]$$

$$= \frac{b^2}{a^2} \cdot a^2$$

$$= b^2.$$

8·21. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியத்திலிருந்து தொலைத்தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப்புள்ளி ஒத்த இயக்கு வரையும், துணை வட்டமும் வெட்டும் புள்ளியாகும்



படம் 82

குவியம் S-இன் ஆயத்தொலைகள் $(ae, 0)$. தொலைதொடு கோடு

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

எனக்கொள்வோம்.

கோடு (1)-க்குச் செங்குத்தாக S வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - 0 = -\frac{a}{b}(x - ae).$$

(அ-து) $ax + by = a^2e \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$

இச்செங்குத்துக்கோடு, தொலைத் தொடுகோட்டை வெட்டும் புள்ளி F எனக் கொள்வோம்.

(1)-இலிருந்து $y = \frac{b}{a} x$.

இதை (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$ax + b.\frac{b}{a}x = a^2e.$$

(அ-து) $\frac{x}{a}(a^2+b^2) = a^2e$.

$$\therefore \quad x = \frac{a^2e}{a^2+b^2} = \frac{a^2e}{a^2e^2} = \frac{a}{e}.$$

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\cdot\frac{a}{e} = \frac{b}{e}.$$

எனவே, F புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(\frac{a}{e}, \frac{b}{e}\right)$.

இதிலிருந்து F புள்ளி $x = \frac{a}{e}$ என்ற இயக்கு வரையின் மேலமையும் என்பது தெளிவாகிறது.

மீண்டும், $CF = \sqrt{\left(\frac{a}{e}-0\right)^2 + \left(\frac{b}{e}-0\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{e^2} + \frac{b^2}{e^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2+b^2}{e^2}} = \sqrt{\frac{a^2e^2}{e^2}}$$

$$= \sqrt{a^2} = a.$$

இதிலிருந்து F புள்ளி $x^2 + y^2 = a^2$ என்ற துணை வட்டத்தின் மேலமையும் என அறிகிறோம்.

எனவே, F புள்ளி, துணை வட்டமும், ஒத்த இயக்கு வரையும் வெட்டும் புள்ளியாகும்.

8·22. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற அதி பரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள் காணல்

அதி பரவளைவும், அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளும் அவைகளின் சமன்பாடுகளில் எண்ணுருப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும் என நாம் முன்னர்க் கண்டோம்.

எனவே, அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ எனின்,

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c'=0$ ஆகும்.

இச் சமன்பாடு இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாட்டைப் பயன்படுத்தி C' மதிப்பைப் பெறலாம்.

மாதிரி 7 : அதி பரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்து வரையும் தொடு கோடு, தொலைத் தொடுகோடுகளை Q, R புள்ளிகளில் சந்திக்கின்றதெனின், QR-இன் நடுப் புள்ளி P என நிறுவுக. அதி பரவளைவு மையம் C எனின், முக்கோணம் CQR-இன் பரப்பு காண்க.

அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

P புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(a\sec\theta,\ b\tan\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\sec\theta-\frac{y}{b}\tan\theta=1 \qquad \dots \qquad \dots \qquad (1)$$

இத் தொடுகோடு,

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (2)$$

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad (3)$$

என்ற தொலைத் தொடுகோடுகளை முறையே Q, R புள்ளிகளில் சந்திக்குமெனின், Q, R புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right), \left(\frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}, \frac{-b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right).$$

QR கோட்டின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனின்,

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a\cos\theta\left(\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}a\cos\theta \cdot \frac{2}{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{a}{\cos\theta} = a\sec\theta.$$

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta} + \frac{-b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}b\cos\theta\left(\frac{1+\sin\theta-1+\sin\theta}{1-\sin^2\theta}\right)$$

$$= \frac{1}{2}b\cos\theta \cdot \frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= b\tan\theta.$$

(அ - து) QR-இன் நடுப் புள்ளி $(a\sec\theta, b\tan\theta)$ ஆகும்.

இது P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் ஆதலின், QR-இன் நடுப் புள்ளி P ஆகும்.

மீண்டும், C புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(0, 0)$ ஆதலின்,

$$\triangle CRQ = \frac{1}{2}\left[\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}\left(\frac{-b\cos\theta}{1+\sin\theta}\right) + \frac{a\cos\theta}{1+\sin\theta}\left(\frac{-b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-ab\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta} - \frac{ab\cos^2\theta}{1-\sin^2\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2ab\cos^2\theta}{\cos^2\theta}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,[-2ab]$$

$$= -\,ab.$$

எனவே, CQR முக்கோணத்தின் பரப்பு ab ஆகும்.

மாதிரி 8 : தொலைத்தொடு கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைக் கோடு அத்தொலைத் தொடுகோட்டிற்கிணை என நிறுவுக.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தொலைத்தொடுகோடு

$$\frac{x}{b} - \frac{y}{b} = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனின், அதன் சரிவு $= \frac{b}{a}$.

தொலைத் தொடுகோடு (2)-இன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி (x_1, y_1) எனின், அப்புள்ளியின் (1)-ஐச் சார்ந்த இசைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதன் சரிவு $= \frac{b^2x_1}{a^2y_1}$

$$= \frac{b^2x_1}{a^2.\,\frac{bx_1}{a}} \qquad \left[\because\ \frac{x_1}{a} - \frac{y_1}{b} = 0\right]$$

$$= \frac{b}{a}.$$

(அ-து) தொலைத் தொடுகோடு (2)-இன் சரிவும், இசைக் கோடு (3)-இன் சரிவும் சமம்.

எனவே, இசைக்கோடு தொலைத்தொடு கோட்டிற்கு இணை.

மாதிரி 9 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$-இன் செங்கோட்டு நாண்கள்தம் அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி $\frac{a^6}{x^2} - \frac{b^6}{y^2} = (a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக.

அதிபரவளைவு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

அதிபரவளைவு (1)-இன் θ புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{ax}{\sec\theta} - \frac{by}{\tan\theta} = a^2 + b^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

கோடு (2)-இன் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக் கோடு

$$\frac{xx_1}{a^2} - \frac{yy_1}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3) ஒரே நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{\frac{a}{\sec\theta}}{\frac{x_1}{a^2}} = \frac{\frac{b}{\tan\theta}}{\frac{y_1}{b^2}} = a^2 + b^2.$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{a^3}{x_1 \sec\theta} = \frac{b^3}{y_1 \tan\theta} = a^2 + b^2.$$

$$\therefore \quad \sec\theta = \frac{a^3}{x_1(a^2+b^2)}, \ \tan\theta = \frac{b^3}{y_1(a^2+b^2)}.$$

$\therefore$ $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ ஆதலின்,

$$\frac{a^6}{x_1^2(a^2+b^2)^2} - \frac{b^6}{y_1^2(a^2+b^2)^2} = 1.$$

$\therefore$ (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$\frac{a^6}{x^2} - \frac{b^6}{y^2} = (a^2 + b^2)^2.$$

மாதிரி 10 : $4x + 3y - 7 = 0$, $x - 2y + 1$ என்ற தொலைத் தொடு கோடுகளைக் கொண்ட அதி பரவளைவு (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லின், அதி பரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(4x + 3y - 7)(x - 2y - 1) = 0.$$

எனவே, அதி பரவளைவின் சமன் பாடு

$$(8 + 3y - 7)(x - 2y - 1) = K.$$

இது (2, 3) புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$(8 + 9 - 7)(2 - 6 - 1) = K.$$

(அ - து) $K = (10)(-5) = -50.$

$\therefore$ அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$(4x + 3y - 7)(x - 2y - 1) = -50.$$

(அ - து) $4x^2 - 5xy - 6y^2 - 11x + 11y + 57 = 0.$

பயிற்சி 8.2.

1. $lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடெனில், தேவையான கட்டுப்பாடு காண்க.

2. $lx + my + n = 0$ கோடு $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் செங்கோடெனில், தேவையான கட்டுப்பாடு காண்க.

3. ஒரு நேர்க்கோடு அதிபரவளைவை P, Q புள்ளிகளிலும், அதன் தொலைத்தொடுகோடுகளை P', Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டினால், $PP' = QQ'$ என நிறுவுக.

4. $3x^2-5y^2=8$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் இசைக்கோடு, அத் தொலைத் தொடுகோட்டிற்கு இணை என நிறுவுக.

5. அதிபரவளைவின் குவியங்களில் ஒன்று ஆதியாகும். அதன் மையத் தொலை விகிதம் $\sqrt{2}$, ஒத்த இயக்குவரை $x+y+1=0$ எனின், அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடுகள் காண்க.

6. $3x^2-2y^2+4x-6y=0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு காண்க.

7. $3x^2-5xy-2y^2+5x+11y-8=0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

8. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$-இன் செங்கோடுகளுக்கு அதிபரவளைவின் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள்தம் இயங்குவழி

$$\frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2}{y^2}=\left(\frac{a^2+b^2}{x^2+y^2}\right)^2$$ என நிறுவுக.

9. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப்புள்ளிகள்தம் இயங்குவழி

$$\left(\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)^2\left(\frac{a^6}{x^2}-\frac{b^6}{y^2}\right)=a^2+b^2$$ என நிறுவுக.

10. C புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ அதிபரவளைவின் P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, தொலைத் தொடு கோடுகளை L, M புள்ளிகளில் வெட்டினால், CLM முக்கோணத்தின் சுற்றுவட்ட மையத்தின் (circumcentre) இயங்குவழி $4(a^2x^2-b^2y^2)^2=(a^2+b^2)^2$ என நிறுவுக.

11. தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் 2α எனின், அதிபரவளைவின் மையத் தொலை விகிதம் $\sec\alpha$ என நிறுவுக.

12. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியங்கள் S, S'. குவியங்களிலிருந்து அதிபரவளைவின் தொடுகோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் M, M' எனின், இவ் விரு புள்ளிகள் துணைவட்டத்தின் மீதமையும் என நிறுவுக. $SM \cdot S'M' = b^2$ எனவும் நிறுவுக.

13. அதிபரவளைவு ஒன்றின் தொலைத் தொடுகோடுகளுள் ஒன்று $x - 2y + 3 = 0$, மற்றொன்று $3x = 2y$ கோட்டிற்கு இணைகோடாகும். அதிபரவளைவு ஆதிவழிச் செல்கிறது. ஆதியிடத்து அதன் தொடுகோடு $x = y$ எனில், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க. அதன் மையம் y ஆயத்தின் மீதமைந்துள்ளது என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடுகளுக்கு அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடுகள் தம் அடிப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழிக் காண்க.

15. $x^2 - y^2 = a^2$ அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் நடுப் புள்ளிகள் தம் இயங்குவழிக் காண்க.

16. $16x^2 - 9y^2 = 144$ அதிபரவளைவின் $x = 2y$ என்ற விட்டத்தின் துணையிய விட்டம் காண்க.

17. அதிபரவளைவின் செங்கோட்டிற்கு, அதன் மையத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோடு அதிபரவளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் சந்திக்காது என நிறுவுக.

18. $2x^2 + 5xy + 2y^2 - 11x - 7y - 4 = 0$ என்ற அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு காண்க.

19. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் தொடுகோடு, அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் அமைக்கும் முக்கோணத்தின் மையக் கோட்டுச் சந்தி (centroid) மற்றோர் அதிபரவளைவின் மீதமையும் என நிறுவுக.

20. $\frac{x_2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவின் குவியங்களைச் சேர்க்கும் கோட்டினை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் தொடுகோடுகளின் அதிபரவளைவைச் சார்ந்த இசைப் புள்ளிகள்தம் இயங்கு வழிக் காண்க.

விடைகள்

1. $a^2l^2 - b^2m^2 = n^2$. 2. $\frac{a^2}{l^2} - \frac{b^2}{m^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{n^2}$.
5. $xy+x+y+1=0$. 6. $18x^2-12y^2+24x-36y-19=0$.
7. $3x^2-5xy-2y^2+5x+11y-16=0$. 13. $(x-2y+3)(3x-2y+3)=9$. 14. $(x^2+y)^2=a^2x^2-b^2y^2$. 15. $(x^2-y^2)^3+4a^2x^2y^2=0$. 16. $32x-9y=0$. 18. $2x^2+5xy+2y^2-11x-7y+5=0$. 20. $\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} = \frac{1}{a^2+b^2}$.

8·23. துணையிய அதிபரவளைவு (Conjugate Hyperbola)

கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சு, துணையச்சு ஆகியவைகளை முறையே துணையச்சு, குறுக்கச்சாகக் கொண்ட அதிபரவளைவு கொடுக்கப்பட்டுள்ள அதிபரவளைவின் துணையிய அதிபரவளைவு எனப்படும்.

(அ - து) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபரவளைவின் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

(அ - து) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

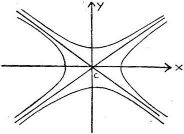
இவ்விரு அதிபரவளைவுகளுக்கும்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

என்ற தொலைத் தொடு கோடுகள் பொதுவானவை.

அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$



படம் 83.

தொலைத் தொடு கோடுகள்

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

துணையிய அதிபரவளைவு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

ஆதியை (α, β) புள்ளிக்கு மாற்றி, ஆயங்களை θ கோணம் சுழற்றினால், புது ஆயங்களைப் பொறுத்துச் சமன்பாடுகள் (1), (2), (3)

$$\frac{(\alpha+x\cos\theta-y\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta+x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2} = 1,$$

$$\frac{(\alpha+x\cos\theta-y\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta+x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2} = 0,$$

$$\frac{(\alpha+x\cos\theta-y\sin\theta)^2}{a^2} - \frac{(\beta+x\sin\theta+y\cos\theta)^2}{b^2} = -1$$

என்றாகும்.

எனவே, ஆதியை மாற்றினும், ஆயங்களை மாற்றினும் தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டிலிருந்து எண்ணுருப்பில் மட்டுமே வேறுபட்டிருக்கும்.

மேலும், துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடும் தொலைத் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டிலிருந்து அதே எண்ணுறுப்பில் மாறுபட்டிருக்கும்.

ஆகவே, $H=0$, $A=0$, $C=0$ என்பவை முறையே அதிபரவளைவு, தொலைத் தொடுகோடுகள், துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடுகளெனின்,

$$C-A = A-H$$

$$\therefore \quad C = 2A - H$$

எனவே, துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$2A - H = 0.$$

8·24. ஓர் அதிபரவளைவின் விட்டம் அவ்வளைவை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், இவ்வட்டத்தின் துணையிய விட்டம் அதனைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்

$$\text{அதிபரவளைவு} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\text{துணையிய அதிபரவளைவு} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$y = m_1 x$ என்ற விட்டம் அதிபரவளைவு (1)-ஐ Q, Q' புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது எனக் கொள்வோம். Q, Q' புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே,

$(a \sec\theta,\ b\tan\theta)$, $(-a\sec\theta,\ -b\tan\theta)$ ஆகும்.

இவ் விட்டத்தின் சரிவு

$$= \frac{b\tan\theta}{a\sec\theta} = \frac{b}{a}\sin\theta.$$

(அ - து) அதிபரவளைவை Q, Q' புள்ளிகளில் வெட்டும் விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \left(\frac{b}{a}\sin\theta\right)x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

இதன் துணையிய விட்டம்.

$$y = \left(\frac{b}{a\sin\theta}\right)x \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

$$\left[\because \left(\frac{b}{a}\sin\theta\right)m_2 = \frac{b^2}{a^2}\right].$$

அதிபரவளைவு (1), விட்டம் (4) ஆகியவை வெட்டும் புள்ளிகள் சமன்பாடுகள் (1), (4)-இலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

$$\therefore \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{b}{a\sin\theta}x\right)^2}{b^2} = 1.$$

(அ-து) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2\sin^2\theta} = 1.$

(அ-து) $\dfrac{x^2}{a^2}\left[1 - \dfrac{1}{\sin^2\theta}\right] = 1.$

(அ-து) $x^2\left(\dfrac{\sin^2\theta - 1}{a^2\sin^2\theta}\right) = 1.$

$$\therefore \quad x^2 = \frac{a^2\sin^2\theta}{-(1-\sin^2\theta)} = -a^2\tan^2\theta.$$

(அ-து) $x = \pm ia\tan\theta$

எனவே, $y = \dfrac{b}{a\sin\theta}x = \dfrac{b}{a\sin\theta}(\pm ia\tan\theta)$

$= \pm ib\sec\theta.$

$\therefore\ y = \left(\dfrac{b}{a}\sin\theta\right)x$ விட்டம் அதிபரவளைவை $(a\sec\theta, b\tan\theta)$, $(-a\sec\theta, -b\tan\theta)$ என்ற மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டினால், துணையிய விட்டம் $y = \left(\dfrac{b}{a\sin\theta}\right)x$ அதிபரவளைவை $(ia\tan\theta, ib\sec\theta)$, $(-ia\tan\theta, -ib\sec\theta)$ என்ற கற்பனைப்புள்ளிகளில் வெட்டும்.

8·25. அதிபரவளைவின் துணையிய விட்டங்கள், துணையிய அதிபரவளைவுக்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதன் துணையிய விட்டங்களின் சமன்பாடுகள்

$y = m_1 x, \quad y = m_2 x$

எனின், $m_1 m_2 = \dfrac{b^2}{a^2}$ ... ... (2)

துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(அ-து) $\dfrac{x^2}{(-a^2)} - \dfrac{y^2}{(-b^2)} = 1.$

$y = m_1 x$, $y = m_2 x$ துணையிய அதிபரவளைவின் துணையிய விட்டங்களெனின்,

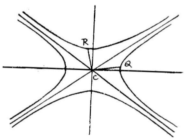
$$m_1 m_2 = \left(\frac{-b^2}{-a^2}\right) = \frac{b^2}{a^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

கட்டுப்பாடுகள் (2), (4) ஒன்றேயாதலின் $y = m_1 x$, $y = m_2 x$ என்பவை, இரண்டு அதிபரவளைவுகளுக்கும் துணையிய விட்டங்களாகும்.

8·26. அதிபரவளைவின் துணையிய விட்டங்கள் அதிபரவளைவையும், துணையிய அதிபரவளைவையும் Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், $CQ^2 - CR^2 = (a^2 - b^2)$

அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

துணையிய அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ ... ... (2)



படம் 84.

துணையிய விட்டங்கள் அதிபரவளைவுகள் (1), (2)-ஐ முறையே Q, R புள்ளிகளில் வெட்டுமெனக் கொள்க.

Q புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(a \sec\theta,\ b \tan\theta)$ எனின், CQ விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \frac{b \tan\theta}{a \sec\theta}\, x$$

(அ-து) $$y = \left(\frac{b}{a} \sin\theta\right) x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

துணையிய விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = \left(\frac{b}{a \sin\theta}\right) x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$\left[\because\ m_1 m_2 = \frac{b^2}{a^2}\right].$$

இஃது அதிபரவளைவு (2)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகள் காணச் சமன்பாடுகள் (2), (4)-ஐத் தீர்க்க வேண்டும்.

$$\therefore\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{\frac{b^2}{a^2 \sin^2\theta} x^2}{b^2} = -1$$

(அ-து) $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2 \sin^2\theta} = -1$$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2}\left(1 - \frac{1}{\sin^2\theta}\right) = -1$

(அ-து) $\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{\sin^2\theta - 1}{\sin^2\theta}\right) = -1.$

$$\therefore \quad x^2 = -\frac{(\sin^2\theta)(a^2)}{\sin^2\theta - 1} = \frac{a^2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= a^2\tan^2\theta.$$

$$\therefore \quad x = \pm a\tan\theta.$$

$$y = \frac{b}{a\sin\theta}x = \frac{b}{a\sin\theta}(\pm a\tan\theta)$$

$$= \pm b\sec\theta.$$

எனவே, துணையிய விட்டம் துணையிய அதிபரவளைவை $(a\tan\theta, b\sec\theta)$, $(-a\tan\theta, -b\sec\theta)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

R புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் $(a\tan\theta, b\sec\theta)$ எனக் கொள்வோம்.

$$CQ^2 = (a\sec\theta - 0)^2 + (b\tan\theta - 0)^2$$

$$= a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta.$$

$$CR^2 = (a\tan\theta - 0)^2 + (b\sec\theta - 0)^2$$

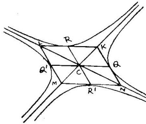
$$= a^2\tan^2\theta + b^2\sec^2\theta.$$

$$\therefore \quad CQ^2 - CR^2 = a^2(\sec^2\theta - \tan^2\theta) + b^2(\sec^2\theta - \tan^2)$$

$$= (\sec^2\theta - \tan^2\theta)(a^2 - b^2)$$

$$= a^2 - b^2.$$

8·27. துணையிய விட்டங்களின் நுனிகளிடத்து அதிபரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளால் அமையும் இணைகரத்தின் உச்சிகள் தொலைத் தொடு கோடுகளின் மேலமையும். இணைகரத்தின் பரப்பு ஒரு மாறிலி யாகும்



படம் 85

படத்தில் காட்டியுள்ளபடி QQ', RR' துணையிய விட்டங்கள் எனக் கொள்வோம்.

இப் புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள்

$Q(a \sec\theta,\ b\tan\theta)$, $Q'(-a\sec\theta,\ -b\tan\theta)$

$R(a\tan\theta,\ b\sec\theta)$, $R'(-a\tan\theta,\ -b\sec\theta)$.

அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ... ... (1)

துணையிய அதிபரவளைவு $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ ... (2)

அதிபரவளைவு (1)-க்கு Q புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\sec\theta - \frac{y}{b}\tan\theta = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

துணையிய அதிபரவளைவு (2)-க்கு R புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{x}{a}\tan\theta - \frac{y}{b}\sec\theta = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

இவைகளிரண்டும் வெட்டும் புள்ளி K எனக் கொள்க. சமன்பாடுகள் (3), (4)-இன் தீர்வுகள் K புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

∴ K-யின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left(\frac{a\cos\theta}{1-\sin\theta}, \frac{b\cos\theta}{1-\sin\theta}\right).$$

எனவே, K புள்ளி $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ என்ற தொலைத் தொடுகோட்டின் மீதமையும்.

இவ்வாறே, இணைகரத்தின் மற்ற உச்சிகளும் தொலைத்தொடுகோடுகளின் மீதமையும்.

மீண்டும், $C(0, 0)$ புள்ளியிலிருந்து R புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு (4)-க்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் நீளம்

$$\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\tan^2\theta}{a^2} + \frac{\sec^2\theta}{b^2}\right)}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sec^2\theta = b^2\tan^2\theta}}.$$

$$CQ = \sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta}.$$

∴ இணைகரம் $KLMN$-இன் பரப்பு

$= 4 \times$ இணைகரம் $CQKR$-இன் பரப்பு

$$= 4\left[\frac{ab}{\sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta}} \cdot \sqrt{a^2\sec^2\theta + b^2\tan^2\theta}\right]$$

$= 4\,ab$

$=$ மாறிலி.

மாதிரி 11 : அதிபரவளைவு, துணையிய அதிபரவளைவு ஆகியவைகளின் மையத் தொலை விகிதங்கள் முறையே e_1, e_2 என்னின்,

$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 1$ என நிறுவுக.

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

இதில் $b^2 = a^2(e_1{}^2 - 1)$

(அ-து) $\frac{a^2+b^2}{a^2} = e_1{}^2.$

துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

இதில் $a^2 = b^2(e_2{}^2 - 1)$

(அ-து) $\frac{a^2+b^2}{b^2} = e_2{}^2.$

எனவே, $\frac{1}{e_1{}^2} + \frac{1}{e_2{}^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2}$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1.$$

மாதிரி 12: அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x+y+4=0$, $4x+3y+1=0$. இவ்வளைவரை $(-1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், இதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க

தொலைத்தொடு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$(2x+y+4)(4x+3y+1)=0.$$

∴ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) + K = 0.$$

இது $(-1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$(-2 + 2 + 4)(-4 + 6 + 1) + K = 0.$$

(அ - து) $K = -12.$

எனவே, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) = 12.$$

துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$2A - H = 0.$$

(அ - து) $2(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) - [(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) - 12] = 0$

(அ - து) $(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) + 12 = 0$

(அ - து) $8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 13y + 16 = 0.$

பிறிதொரு முறை :

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$(2x + y + 4)(4x + 3y + 1) = 0$$

(அ - து) $8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 13y + 4 = 0.$

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 13y + K = 0.$$

இது $(-1, 2)$ புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$8 - 20 + 12 - 18 + 26 + K = 0.$$

$\therefore \quad K = -8.$

எனவே, அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 13y - 8 = 0.$$

துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 13y + l = 0$$

என்ற வடிவிலிருக்கும்.

தொலைத் தொடு கோடுகளின் எண்ணுறுப்பு

$= \frac{1}{2}$ [அதிபரவளைவின் எண்ணுறுப்பு + துணையிய அதிபரவளைவின் எண்ணுறுப்பு].

$$\therefore \quad 4 = \frac{1}{2}[-8 + l].$$

$$8 = -8 + l.$$

எனவே, $l = 16$.

$\therefore$ துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 10xy + 3y^2 + 18x + 18y + 16 = 0.$$

பயிற்சி 8.3.

1. ஓர் அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள் $x+2y+3=0$, $3x+4y+5=0$. இது $(1, -1)$ புள்ளி வழிச் செல்லின், இதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு காண்க.

2. $3x^2 - 2y^2 + 4x - 6y = 0$-த்தின் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $9x^2 - 6y^2 + 12x - 15y - 19 = 0$ என நிறுவுக.

3. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 17x + y + 14 = 0$ அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகளையும், துணையிய அதிபரவளைவையும் காண்க.

4. CQ, CR என்பவை அதிபரவளைவின் துணையிய அரை விட்டங்கள் (semi-diameters). S, S' என்பவை அதன் குவியங்களெனின் $SQ.S'Q = CR^2$ என நிறுவுக.

5. அதிபரவளைவின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து துணையிய அதிபரவளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகள் PQ, PR எனின், QR கோடு அதிபரவளைவை P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறு முனையில் தொடும் என நிறுவுக.

6. துணையிய விட்டங்கள் அதிபரவளைவையும், அதன் துணையிய அதிபரவளைவையும் வெட்டும் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோடு தொலைத்தொடு கோடு ஒன்றுக்கு இணை எனவும், இக் கோடு மற்றொரு தொலைத் தொடு கோட்டினால் இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படும் எனவும் நிறுவுக.

7. துணையிய அதிபரவளைவைத் தொடும் அதிபரவளைவின் நாண்கள் தொடு புள்ளியில் இரு சமமாகப் பிரிக்கப்படும் என நிறுவுக.

8. அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சின் மீதுள்ள P புள்ளியிலிருந்து தொலைத் தொடு கோட்டிற்கு வரையும் செங்

குத்துக் கோட்டின் அடிப் புள்ளி Q. அதிபரவளைவில் R புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு P வழிச் சென்றால், QR கோடு துணையச்சுக்கு இணை என நிறுவுக.

9. (5, 3) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஓர் அதிபரவளைவின் மையம் (1, 2). தொலைத் தொடுகோடுகள் $2x+3y=0$, $3x-2y=0$ என்ற கோடுகளுக்கிணை எனின், அதிபரவளைவின் சமன்பாடு $(2x+3y-8)(3x-2y+1)=110$ என நிறுவுக. அதன் துணையிய அதிபரவளைவின் சமன்பாட்டையும் காண்க.

10. துணையிய அதிபரவளைவின் ஒரு பிரிவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியிலிருந்து அதிபரவளைவுக்கு வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண் துணையிய அதிபரவளைவின் மற்றொரு பிரிவைத் (branch) தொடும் என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $3x^2+10xy+3y^2+14x+22y+23=0$. 3. $3x^2-5xy-2y^2+17x+y+10=0$; $3x^2-5xy-2y^2+17x+y+6=0$.

8·27. செவ்வக அதிபரவிளைவு (Rectangular Hyperbola)

தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டும் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் கொண்ட அதிபரவளைவு செவ்வக அதிபரவளைவு எனப்படும்.

8·28. செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

(1)-இன் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$$

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0.$$

இத் தொலைத் தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின், அவைகளின் சரிவுகள்தம் பெருக்குத்தொகை -1 ஆகும்.

$$\therefore \left(\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right) = -1$$

(அ-து) $b^2 = a^2$

$\therefore \quad b = a.$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(அ-து) $x^2 - y^2 = a^2$ என்றாகும்.

எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

8·29. செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத்தொடுகோடுகள்

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ இன் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0,\ \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0.$$

இதில் $b = a$ எனப் பிரதியிடின்,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} = 0,\ \frac{x}{a} - \frac{y}{a} = 0$$

(அ-து) $x+y=0, \quad x-y=0.$

எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகள்

$$(x+y)\ (x-y)=0$$

(அ-து) $x^2 - y^2 = 0.$

8·30. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ அதிபரவளைவுக்குப் பொருந்தும் அனைத்து முடிவுகளும் $b=a$ எனப் பிரதியிடின், $x^2-y^2=a^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுக்கும் பொருந்தும்.

8·31. செவ்வக அதிபரவளைவின் மையத் தொலை விகிதம்

செவ்வக அதிபரவளைவின் மையத்தொலை விகிதம் e எனக் கொள்வோம்.

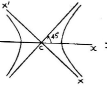
$$b^2 = a^2(e^2-1).$$

இதில் $b = a$ எனப்பிரதியிடின்,

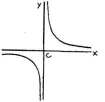
$$a^2 = a^2(e^2-1).$$

$$\therefore \quad e^2 = 2 \quad (\text{அ-து}) \quad e = \sqrt{2}.$$

8·32. தொலைத்தொடுகோடுகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு



படம் 86 (i)



படம் 86 (ii)

செவ்வக அதிபரவளைவின் தொலைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் 90°. மேலும், தொலைத் தொடுகோடுகள் ஆயங்களுடன் சமச்சாய்வு கோண்டிருக்கும். எனவே, ஆதியை மாற்றாமல் ஆயங்களை 45°-க்குச் சுழற்றினால் தொலைத் தொடுகோடுகளை ஆயங்களாகக் கொண்ட அதிபரவளைவு கிடைக்கும்.

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்து வளைவின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், புதிய ஆயங்களைப்

பொறுத்து அதே புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் (X, Y) எனவும் கொள்வோம்.

பின், பத்தி 3·5-இன் படி

$$x = X\cos(-45) - Y\sin(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}}(X+Y)$$

$$y = X\sin(-45) + Y\cos(-45) = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y-X).$$

பழைய ஆயங்களைப்பொறுத்துச் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

எனவே, புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்துச் செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)^2 - \left(\frac{Y-X}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2$$

(அ-து) $(X+Y)^2 - (Y-X)^2 = 2a^2$

(அ-து) $4XY = 2a^2$

(அ-து) $XY = \dfrac{a^2}{2}$.

$c^2 = \dfrac{a^2}{2}$ எனக் கொண்டால்,

சமன்பாடு $XY = c^2$ என்றாகும்.

பிறிதொருமுறை :

தொலைத் தொடு கோடுகள் x, y ஆயங்களாதலின், அவற்றின் சமன்பாடுகள்

$$x = 0,\ y = 0 \text{ ஆகும்.}$$

∴ தொலைத் தொடு கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$xy = 0.$$

∴ அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = K. \qquad (K \text{ ஒரு நிலையெண்}).$$

அதிபரவளைவின் குறுக்கச்சின் நீளம் $2a$ எனின், $CA = 2a$. இங்கு A அதிபரவளைவின் முனை.

A-யின் ஆயத் தொலைகள்

$$(CA \cos 45°,\ CA \sin 45°) \text{ (அ-து) } \left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right).$$

$xy = K$ இப் புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்,

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = K.$$

$$\therefore\ K = \frac{a^2}{2}.$$

எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = \frac{a^2}{2}.$$

$$c^2 = \frac{a^2}{2} \text{ எனக் கொண்டால்,}$$

சமன்பாடு $xy = c^2$ என்றாகும்.

8·33. $xy=c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவுக்குப் பொருந்தும் கீழ்க் கண்ட முடிவுகளை எளிதில் நிறுவலாம்

(i) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) = c^2.$$

(ii) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்து வரையும் தொடு கோடுகளின் தொடு நாண்

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) = c^2.$$

(iii) (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக் கோடு

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) = c^2.$$

(iv) (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xx_1 - yy_1 = x_1^2 - y_1^2.$$

(v) (x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு $T = S_1$

(அ-து) $\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) - c^2 = x_1 y_1 - c^2.$

(vi) (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு $T^2 = SS_1$

(அ-து) $\left[\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) - c^2\right]^2 = (xy - c^2)(x_1 y_1 - c^2).$

இவைகளின் நிரூபணங்கள் மாணவர்களுக்குப் பயிற்சியாக விடப்பட்டுள்ளன.

8·34. துணையலகு

$xy = c^2$ சமன்பாட்டில், t-யின் அனைத்து மதிப்புகளுக்கும் (பூச்சியத்தைத் தவிர்த்து) $x = ct$, $y = \frac{c}{t}$ பொருந்தும். எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு t-ஐத் துணையலகாகக் கொள்ளலாம். அதாவது, செவ்வக அதிபரவளைவு $xy = c^2$-இல் புள்ளி 't'-யின் ஆயத்தொலைகள் $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ ஆகும்.

8·35. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் t_1, t_2 புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

இவ் வளைவின் மேலுள்ள $P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right)$$

எனக் கொள்வோம்.

$\therefore$ நாண் PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{y - \frac{c}{t_1}}{\frac{c}{t_1} - \frac{c}{t_2}} = \frac{x - ct_1}{ct_1 - ct_2}.$$

(அ-து) $y - \frac{c}{t_1} = \frac{\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}}{t_1 - t_2}(x - ct_1)$

(அ-து) $y - \frac{c}{t_1} = -\frac{1}{t_1 t_2}(x - ct_1)$

(அ-து) $yt_1t_2 - ct_2 = -x + ct_1$

(அ-து) $x + yt_1t_2 = c(t_1 + t_2)$.

எனவே, PQ நாணின் சமன்பாடு

$$x + yt_1t_2 = c(t_1 + t_2).$$

8·36. $P(t_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் செவ்வக அதிபரவளைவு $xy = c^2$-இன் நாண்

$$x + yt_1t_2 = c(t_1 + t_2) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

Q புள்ளி P-யை நெருங்கி முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும் போது, நாண் PQ புள்ளி P யிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (1)-இல் $t_2 = t_1$ எனப்பிரதியிடின்,

$$x + yt_1t_1 = c(t_1 + t_1)$$

(அ-து) $x + yt_1^2 = 2ct_1$.

எனவே, 't' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு $x + yt = 2ct$.

8·37. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

$P(t_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$x + yt_1 = 2ct_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$Q(t_2)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$x + yt_2 = 2ct_2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இவ்விரு சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத்தொலைகளாகும்.

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$y(t_1^2 - t_2^2) = 2c(t_1 - t_2)$$

(அ-து) $y(t_1 + t_2) = 2c.$

$$\therefore \quad y = \frac{2c}{t_1 + t_2}.$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$x + \frac{2ct_1^2}{t_1 + t_2} = 2ct_1.$$

$$\therefore \quad x = 2ct_1 - \frac{2ct_1^2}{t_1 + t^2}$$

$$= \frac{2ct_1(t_1 + t_2) - 2ct_1^2}{t_1 + t_2)}$$

$$= \frac{2ct_1t_2}{t_1 + t_2}.$$

எனவே, t_1, t_2 புள்ளிகளிடத்துத் தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$\frac{2ct_1t_2}{t_1 + t_2}, \quad \frac{2c}{t_1 + t_2}.$$

8·38. புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

செவ்வக அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

t புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + yt^2 = 2ct.$$

எனவே, அதன் சரிவு $= -\dfrac{1}{t^2}$.

$\therefore$ செங்கோட்டின் சரிவு $= t^2$.

$\therefore$ t புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$y - \frac{c}{t} = t^2 (x - ct).$$

$$yt - c = xt^3 - ct^4$$

(அ - து) $xt^3 - yt = ct^4 - c.$

$$\therefore \quad xt - \frac{y}{t} = ct^2 - \frac{c}{t^2}.$$

எனவே, t புள்ளியிடத்துச் செங்கோட்டின் சமன்பாடு

$$xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right).$$

8·39. செவ்வக அதிபரவளைவின் உள் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் (inscribed triangle) குத்துக் கோட்டு மையம் (orthocentre) செவ்வக அதிபரவளைவின் மீதமையும்

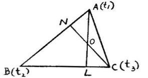
செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

இதனுள் வரையப்பட்ட முக்கோணத்தின் முனைகள் A, B, C எனக் கொள்வோம். அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right), \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right)$$

எனவும் கொள்வோம்.



படம் 87.

AB கோட்டின் சமன்பாடு

$$x + yt_1t_2 = C(t_1 + t_2).$$

AB கோட்டின் சரிவு $= -\dfrac{1}{t_1t_2}$.

எனவே, AB-க்குச் செங்குத்தாக C வழிச் செல்லும் CN கோட்டின் சமன்பாடு

$$y - \frac{c}{t_3} = t_1t_2(x - ct_3)$$

(அ-து) $y - xt_1t_2 = \dfrac{c}{t_3} - ct_1t_2t_3$ ... ... (1)

இவ்வாறே, AL கோட்டின் சமன்பாடு

$y - xt_2t_3 = \dfrac{c}{t_1} - ct_1t_2t_3$ ... ... (2)

இவ்விரு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளி குத்துக்கோட்டு மையமாகும். இப்புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் சமன்பாடுகள் (1), (2)-இன் தீர்வுகளாம்.

(1)-இலிருந்து (2)-ஐக் கழிப்பின்,

$$x(t_2t_3 - t_1t_2) = c\left(\frac{1}{t_3} - \frac{1}{t_1}\right)$$

(அ-து) $xt_1t_2t_3\left(\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_3}\right) = -c\left(\dfrac{1}{t_1} - \dfrac{1}{t_3}\right)$

$$\therefore\ x = \frac{-c}{t_1t_2t_3}.$$

இம்மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$y - \left(\frac{-c}{t_1t_2t_3}\right)t_1t_2 = \frac{c}{t_3} - ct_1t_2t_3$$

(அ-து) $y + \dfrac{c}{t_3} = \dfrac{c}{t_3} - ct_1t_2t_3$.

$$\therefore\ y = -ct_1t_2t_3.$$

எனவே, குத்துக்கோட்டு மையம்

$$\left(\frac{-c}{t_1 t_2 t_3}, \ -ct_1 t_2 t_3\right).$$

இப்புள்ளி $xy=c^2$ என்ற சமன்பாட்டில் பொருந்துமாதலின், குத்துக்கோட்டு மையம் O, செவ்வக அதிபரவளைவின் மீதமையும்.

மாதிரி 13 : $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் $(2h, 2k)$ என்ற நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி

$(x-h)(y-k)=hk$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளைவின் நாண் AB எனவும், அதன் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore$ AB நாணின் சமன்பாடு $T=S_1$

(அ-து) $\frac{1}{2}(xy_1+x_1y)-c^2=x_1y_1-c^2$

(அ-து) $xy_1+x_1y=2x_1y_1$.

இது, $(2h, 2k)$ புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$2hy_1+2kx_1=2x_1y_1$$

(அ - து) $hy_1+kx_1=x_1y_1$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$hy+kx=xy$$

(அ - து) $xy-kx-hy=0$.

இரு பக்கமும் hk-ஐக் கூட்டினால்,

$$xy-kx-hy+hk=hk.$$

$$\therefore \quad (x-h)(y-k)=hk.$$

மாதிரி 14 : $xy=c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவின் $2l$ நீளமுள்ள நாண்கள்தம் நடுப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(x^2+y^2)(xy-c^2)=K^2xy$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதி பரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இதன் நாண்களில் ஒன்று AB எனவும், $AB = 2l$ எனவும் கொள்வோம்.

AB-யின் நடுப் புள்ளி (x_1, y_1) எனின், நாண் AB-யின் சமன்பாடு $T = S_1$

(அ - து) $\frac{1}{2}(xy_1 + x_1 y) - c^2 = x_1 y_1 - c^2$

(அ - து) $xy_1 + x_1 y = 2x_1 y_1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இன் தீர்வுகள் A, B புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகளாகும்.

அவைகள் (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனின்,

$$4l^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

(2)-இலிருந்து

$$y = \frac{2x_1 y_1 - xy_1}{x_1}$$

இதை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$x\left(\frac{2x_1 y_1 - xy_1}{x_1}\right) = c^2$$

(அ - து) $2xx_1 y_1 - x^2 y_1 = c^2 x_1$

(அ - து) $x^2 y_1 - 2x_1 y_1 x + c^2 x_1 = 0.$

இவைகளின் மூலங்கள் x_2, x_3 ஆதலின்

$$x_2 + x_3 = \frac{2x_1 y_1}{y_1} = 2x_1$$

$$x_2 x_3 = +\frac{c^2 x_1}{y_1}.$$

$$\therefore \quad (x_2 - x_3)^2 = (x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3$$

$$= 4x_1^2 - 4\frac{c^2 x_1}{y_1}.$$

$$(y_2-y_3)^2 = \left(\frac{c^2}{x_2} - \frac{c^2}{x_3}\right)^2 \qquad \left(\because\ y = \frac{c^2}{x}\right)$$

$$= \frac{c^4 (x_3-x_2)^2}{(x_2x_3)^2}$$

$$= \frac{c^4}{c^4 \dfrac{x_1^2}{y_1^2}}\left[4x_1^2 - 4c^2\frac{x_1}{y_1}\right]$$

$$= \frac{y_1^2}{x_1^2}\left[\frac{4x_1^2y_1 - 4c^2x_1}{y_1}\right]$$

$$= \frac{4y_1\,[x_1^2y_1 - c^2x_1]}{x_1^2}.$$

சமன்பாடு (8)-இல் இம்மதிப்புக்களைப் பிரதியிடின்,

$$4l^2 = \left(4x_1^2 - \frac{4c^2x_1}{y_1}\right) + \frac{4y_1}{x_1^2}(x_1^2y_1 - c^2x_1)$$

$$= 4x_1^2 - 4\frac{c^2x_1}{y_1} + 4y_1^2 - \frac{4c^2y_1}{x_1}$$

$$= 4(x_1^2+y_1^2) - 4c^2\left(\frac{x_1}{y_1} + \frac{y_1}{x_1}\right)$$

$$= 4(x_1^2+y_1^2) - \frac{4c^2}{x_1y_1}(x_1^2+y_1^2).$$

$$\therefore\quad x_1y_1l^2 = x_1y_1(x_1^2+y_1^2) - c^2(x_1^2+y_1^2)$$

(அ-து) $x_1y_1l^2 = (x_1^2+y_1^2)(x_1y_1 - c^2)$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்குவழி

$$xyl^2 = (x^2+y^2)(xy - c^2).$$

மாதிரி 15 : $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு வளைவை மீண்டும் t_2 புள்ளியில் வெட்டினால் $t_1^3 t_2 = -1$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2.$$

t_1 புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xt_1 - \frac{y}{t_1} = c\left(t_1^2 - \frac{1}{t_1^2}\right).$$

இது t_2 புள்ளியில் வளைவை மீண்டும் சந்திக்குமெனின்,

$$ct_2t_1 - \frac{c}{t_1t_2} = c\left(t_1^2 - \frac{1}{t_1^2}\right)$$

(அ - து) $t_1^2t_2^2 - 1 = \dfrac{t_1^4 - 1}{t_1}t_2$

(அ - து) $t_1^3t_2^2 - t_1 = t_2t_1^4 - t_2$.

$\therefore \quad t_1^3t_2^2 - t_1^4t_2 + t_2 - t_1 = 0$

(அ - து) $t_1^3t_2(t_2 - t_1) + (t_2 - t_1) = 0$

(அ - து) $(t_2 - t_1)(t_2t_1^3 + 1) = 0$.

$\because \quad t_1 \neq t_2,\ t_1^3t_2 = -1.$

மாதிரி 16 : $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் செங்கோட்டு நாண்களின் இசைப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $(x^2 - y^2)^2 + 4c^2xy = 0$ என நிறுவுக.

$xy = c^2$ என்ற செவ்வக அதிபரவளைவில் t புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

செங்கோட்டின் இசைப் புள்ளி (x_1, y_1) எனின், அப்புள்ளியின் அதிபரவளைவு $xy = c^2$-ஐச் சார்ந்த இசைக் கோடு

$$\frac{1}{2}(xy_1 + x_1y) = c^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{t}{\frac{y_1}{2}} = \frac{\frac{-1}{t}}{\frac{x_1}{2}} = \frac{t^2 - \frac{1}{t^2}}{c}$$

(அ-து) $\frac{2t}{y_1} = -\frac{2}{x_1 t} = \frac{t^4-1}{ct^2}$.

$\therefore \quad t^2 = -\frac{y_1}{x_1}; \quad \frac{2}{tx_1} = \frac{1-t^4}{ct^2}$

(அ-து) $\frac{t}{x_1} = \frac{1-t^4}{2c}$.

$\therefore \quad \frac{t^2}{x_1^2} = \frac{(1-t^4)^2}{4c^2}$

எனவே, $\frac{\frac{-y_1}{x_1}}{x_1^2} = \frac{\left(1-\frac{y_1^2}{x_1^2}\right)^2}{4c^2}$

(அ-து) $\frac{-y_1}{x_1^3} = \frac{(x_1^2-y_1^2)^2}{4c^2 x_1^4}$

(அ-து) $4c^2 x_1 y_1 + (x_1^2 - y_1^2)^2 = 0$.

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$(x^2-y^2)^2 + 4c^2 xy = 0$.

8·40. $xy = c^2$ அதிபரவளைவுக்குக் குறித்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து நான்கு செங்கோடுகள் வரையக்கூடும்.

செங்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

t புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$xt - \frac{y}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right).$$

இது (α, β) என்ற குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$\alpha t - \frac{\beta}{t} = c\left(t^2 - \frac{1}{t^2}\right)$$

(அ-து) $\alpha t^2 - \beta = \frac{c}{t}(t^4 - 1)$

(அ-து) $ct^4 - \alpha t^3 + \beta t - c = 0$ ... ... (2)

இது t-யில் நாற்படிச் சமன்பாடாதலின் t-யிக்கு நான்கு மதிப்புக்கள் உண்டு. இவைகள் (α, β) புள்ளி வழிச் செல்லும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளாகும். t-யின் மதிப்புக்கள் t_1, t_2, t_3, t_4 எனின், (α, β) புள்ளி வழிச் செல்லும் செங்கோடுகள் நான்கு எனத் தெளிவாகிறது.

மேலும், $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = \dfrac{\alpha}{c}$ ... ... (3)

$$t_1t_2 + t_1t_3 + t_1t_4 + t_2t_3 + t_2t_4 + t_3t_4 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = -\frac{\beta}{c} \quad \ldots \quad (5)$$

$$t_1t_2t_3t_4 = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$A(t_1)$, $B(t_2)$, $C(t_3)$ எனின், முக்கோணம் ABC-யின் குத்துக் கோட்டின் மையம்

$$\left[-\frac{c}{t_1t_2t_3},\ -ct_1t_2t_3\right] \quad \ldots \quad (\text{பத்தி } 8\cdot 39).$$

சமன்பாடு (6)-இலிருந்து குத்துக் கோட்டு மையம்

$$\left[ct_4,\ \frac{c}{t_4}\right] \text{ என்றாகும்.}$$

இது நான்காவது அடிப் புள்ளியாகும்.

எனவே, குறித்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து $xy = c^2$ எனும் செவ்வக அதி பரவளைவுக்கு வரையக் கூடிய செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளில் எவையேனும் மூன்றால் அமையும் முக்கோணத்தின் குத்துக் கோட்டு மையம் நான்காவது புள்ளியாகும்.

8·41. செவ்வக அதிபரவளைவும் வட்டமும் வெட்டும் புள்ளிகள்

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

வட்டம் $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + K = 0$ ... (2)

எனக் கொள்வோம்.

செவ்வக அதிபரவளைவு (1)-இல் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி $\left(ct, \frac{c}{t}\right)$ என்போம்.

இது வட்டம் (2)-இன் மீதமையுமெனின்,

$$(ct)^2 + \left(\frac{c}{t}\right)^2 + 2g(ct) + 2f\left(\frac{c}{t}\right) + K = 0$$

$$(\text{அ-து})\quad c^2t^2 + \frac{c^2}{t^2} + 2gct + 2f\frac{c}{t} + K = 0$$

$$(\text{அ-து})\quad c^2t^4 + 2gct^3 + Kt^2 + 2fct + c^2 = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

இது t-யில் நாற்படிச்சமன்பாடாதலின் t-யிக்கு நான்கு மதிப்புக்கள் உண்டு. அவை, t_1, t_2, t_3, t_4 எனக் கொள்வோம். ஒவ்வொரு தீர்வுக்கும் ஒரு வெட்டுப் புள்ளி கிடைக்கும்,

எனவே, செவ்வக அதிபரவளைவும், வட்டமும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

மேலும்,

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = -\frac{2g}{c} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$t_1t_2 + t_2t_3 + t_3t_4 + t_1t_3 + t_2t_4 + t_1t_4 = \frac{K}{c^2} \quad \ldots \quad (4)$$

$$t_1t_2t_3 + t_1t_2t_4 + t_2t_3t_4 + t_1t_3t_4 = -\frac{2f}{c} \quad \ldots \quad (5)$$

$$t_1t_2t_3t_4 = -1 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

வெட்டும் புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள்

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right), \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right), \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right), \left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right).$$

x ஆயத் தொலைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$ct_1 \cdot ct_2 \cdot ct_3 \cdot ct_4 = c^4t_1t_2t_3t_4 = c^4.$$

y ஆயத் தொலைகளின் பெருக்குத் தொகை

$$\frac{c}{t_1} \cdot \frac{c}{t_2} \cdot \frac{c}{t_3} \cdot \frac{c}{t_4} = \frac{c^4}{t_1t_2t_3t_4} = c^4.$$

எனவே, வெட்டும் புள்ளிகளின் x ஆயத் தொலைகளின் பெருக்குத்தொகை y ஆயத் தொலைகளின் பெருக்குத் தொகைக்குச் சமம்.

மேலும், செவ்வக அதிபரவளைவில் t_1, t_2, t_3, t_4 எனும் புள்ளிகள் $t_1t_2t_3t_4 = 1$ எனும் கட்டுப்பாட்டிலிருப்பின் அவை நான்கும் ஒரே வட்ட வரையிலுள்ள புள்ளிகளாகும்.

மாதிரி 17 : $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை ஒரு வட்டம் A, B, C, D புள்ளிகளில் வெட்டும். முக்கோணம் ABC–யின் குத்துக் கோட்டு மையம் O எனின், O, D ஆகிய புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவளைவின் விட்டத்தின் நுனிகளாகும் என நிறுவுக.

பத்தி 8·41-இன்படி A, B, C, D புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் முறையே

$$\left(ct_1, \frac{c}{t_1}\right),\ \left(ct_2, \frac{c}{t_2}\right),\ \left(ct_3, \frac{c}{t_3}\right),\ \left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$$

எனின் முக்கோணம் ABC–யின் குத்துக்கோட்டு மையம் பத்தி 8·39–இன்படி

$$\left(-\frac{c}{t_1t_2t_3},\ -ct_1t_2t_3\right).$$

பத்தி 8·41–இல் சமன்பாடு (6)-இன்படி,

$$t_1t_2t_3t_4 = 1.$$

$\therefore$ $\triangle ABC$-யின் குத்துக் கோட்டு மையம்

$$O\left(-ct_4, -\frac{c}{t_4}\right)$$

D புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\left(ct_4, \frac{c}{t_4}\right)$ ஆதலின், O, D ஆகிய புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவளைவின் விட்டத்தின் நுனிகளாகும்.

மாதிரி 18 : O புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவை, r அலகு ஆரம் கொண்ட ஒரு வட்டம் A, B, C, D புள்ளிகளில் வெட்டினால் $OA^2+OB^2+OC^2+OD^2=4r^2$ என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$xy = c^2 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + K = 0 \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

செவ்வக அதிபரவளைவு (1)-ஐ வட்டம் (2) வெட்டும் புள்ளிகள் $A(t_1)$, $B(t_2)$, $C(t_3)$, $D(t_4)$ எனின், பத்தி 8·41-இன்படி,

$$\Sigma t_1 = -\frac{2g}{c}$$

$$\Sigma t_1 t_2 = \frac{K}{c^2}$$

$$\Sigma t_1 t_2 t_3 = -\frac{2f}{c}$$

$$t_1 t_2 t_3 t_4 = 1.$$

$$OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2$$

$$= \left(c^2 t_1^2 + \frac{c^2}{t_1^2}\right) + \left(c^2 t_2^2 + \frac{c^2}{t_2^2}\right) + \left(c^2 t_3^2 + \frac{c^2}{t_3^2}\right) + \left(c^2 t_4^2 + \frac{c^2}{t_4^2}\right)$$

$$= c^2 (t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_4^2) + c^2\left(\frac{1}{t_1^2} + \frac{1}{t_2^2} + \frac{1}{t_3^2} + \frac{1}{t_4^2}\right)$$

$$= c^2 [(\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_1 t_2] + c^2 \left[\left(\Sigma \frac{1}{t_1}\right)^2 - 2\Sigma \frac{1}{t_1 t_2}\right]$$

$$= c^2 [(\Sigma t_1)^2 - 2\Sigma t_1 t_2] + c^2 \left[\left(\frac{\Sigma t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 t_3 t_4}\right)^2 - \frac{2\Sigma t_1 t_2}{t_1 t_2 t_3 t_4}\right]$$

$$= c^2 \left[\frac{4g^2}{c^2} - \frac{2K}{c^2}\right] + c^2 \left[\frac{4f^2}{c^2} - \frac{2K}{c^2}\right]$$

$= 4g^2 - 2K + 4f^2 - 2K$

$= 4(g^2 + f^2 - K).$

வட்ட ஆரம் r ஆதலின்,

$r^2 = g^2 + f^2 - K.$

$\therefore \quad OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 = 4r^2.$

பயிற்சி 8.4.

1. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவைச் சார்ந்த $y^2=4ax$ பரவளைவின் தொடுகோடுகள்தம் இசைபுள்ளிகள் இயங்குவழிக் காண்க.

2. $x^2=4ay$ பரவளைவின் தொடுகோடு $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை A, B புள்ளிகளில் வெட்டினுல் நாண் AB-யின் நடுப்புள்ளி ஒரு நிலைத்த பரவளைவின் மீதமையும் என நிறுவுக.

3. $x^2+16ay=0$ பரவளைவின் புள்ளியின் $xy=2a^2$-ஐச் சார்ந்த இசைக்கோடு $y^2=ax$ பரவளைவைத் தொடும் என நிறுவு.

4. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு, தொலைத் தொடுகோடுகளை A, B புள்ளி களில் வெட்டும். செவ்வக அதிபரவளைவின் மையம் C எனின், முக்கோணம் ABC-யின் பரப்பு ஒரு மாறிலி எனவும், AB-யின் நடுப்புள்ளி P எனவும் நிறுவுக.

5. செவ்வக அதிபரவளைவின் குவியங்கள் S, S', மையம் C, P வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின் $SP.S'P=CP^2$ என நிறுவுக.

6. m-மின் அனைத்து மதிப்புக்களுக்கும் $y-mx=0$, $y+mx=0$ எனும் கோடுகள் $xy=c^2$-இன் துணையிய விட்டங்கள் என நிறுவுக.

7. $xy=1$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவை ஒரு வட்டம் வெட்டும் புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) எனின், $x_1x_2x_3x_4=y_1y_2y_3y_4=1$ என நிறுவுக.

8. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவினுள் பக்கங்கள் $y^2=4ax$ பரவளைவைத் தொடும்படி வரையப்படும் முக்கோணங்கள் முடிவிலி (infinite) என நிறுவுக.

9. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு (α, β) புள்ளியிலிருந்து வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப்புள்ளிகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4) எனின்,

$$x_1+x_2+x_3+x_4=\alpha,$$

$$y_1+y_2+y_3+y_4=\beta$$ என நிறுவுக.

10. (α, β) புள்ளியிடத்துச் சமமாகப் பிரிக்கப்படும் $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் நாணின் நீளம்

$$2\sqrt{\frac{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha\beta-c^2)}{\alpha\beta}}$$ எனக் காண்பி.

11. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவும், $y^2=4ax$ பரவளைவும் வெட்டும் புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் x ஆயத்துடன் பிறப்பிக்கும் கோணங்கள் θ_1, θ_2 எனின்,

$$\tan\theta_1+2\tan\theta_2=0$$ என நிறுவுக.

12. செவ்வக அதிபரவளைவில் இணையான நாண்களை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டங்கள் பொது அச்சு விட்டங்கள் என நிறுவுக.

13. ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் துணையிய விட்டங்கள் தொலைத் தொடுகோடுகளுடன் சமச் சாய்வுடையனவாக இருக்கும் என நிறுவுக.

14 $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் P, Q, R என்ற யாதேனும் மூன்று புள்ளிகளின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) எனின், PQR முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{c^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{x_1x_2x_3}$$ என நிறுவுக.

15. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$, $R(x_3, y_3)$ புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளாலமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பு

$$\frac{2c^2(x_1-x_2)(x_2-x_3)(x_3-x_1)}{(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)}$$ என நிறுவுக.

16. $xy=c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் தொடுகோடு $y+9x=6c$ எனவும், தொடுபுள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $\frac{c}{3}$, $3c$ எனவும் நிறுவுக.

17. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவை ஒரு வட்டம் P, Q, R, S புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், கோடு PQ அதிபரவளைவு மையம் வழிச் செல்லின், RS வட்ட மையம் வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

18. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு வளைவை மீண்டும் Q புள்ளியில் சந்திக்குமெனின், PQ-வை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டம் P வழிச் செல்லும் விட்டத்தின் மறுமுனையில் வளைவை வெட்டும் என நிறுவுக.

19. (α, β) புள்ளியிலிருந்து $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் $(0, 0)$, (α, β) புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் மற்றொரு செவ்வக அதிபரவளைவின் மீதுள்ளன என நிறுவுக.

20. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் $P(t_1)$, $Q(t_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் $R(t_3)$, $S(t_4)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணுக்குச் செங்குத்தெனின், நாண்கள் PR, QS தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும் என நிறுவுக.

21. $xy = c^2$-இல் PQ என்ற நாண் தொலைத் தொடுகோடுகளை R, S புள்ளிகளில் சந்திப்பின், $PR=QS$ என நிறுவுக.

22. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் ஒரு விட்டம் PQ. P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடும், Q புள்ளிவழி தொலைத் தொடுகோட்டிற்கிணையாக வரையும் கோடும் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்குவழி $xy + 4c^2 = 0$ என நிறுவுக.

23. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவில் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(c \tan \phi,\ c \cot \phi)$. $\phi + \phi'$ ஒரு மாறிலி யெனின், ϕ, ϕ' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் நாண்கள் அதிபரவளைவின் துணையச்சின் மேலுள்ள நிலைத்த புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

24. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவின் PQ நாண் வளைவில் O புள்ளியில் செங்கோணத்தை ஏற்படுமெனின், O புள்ளி யிடத்துச் செங்கோட்டிற்கு PQ இணை என நிறுவுக.

25. $xy = c^2$ செவ்வக அதிபரவளைவுக்கு (α, β) புள்ளியில் இருந்து வரையும் செங்கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் செவ்வக அதிபரவளைவும், $x^2 - y^2 - \alpha x + \beta y = 0$ எனும் செவ்வக அதிபரவளைவும் வெட்டும் புள்ளிகள் என நிறுவுக.

விடைகள்

1. $ax^2 + 2c^2 y = 0$.

9. இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு, கூம்பு வளைவு வரைதல்

(General Equation of Second Degree, Tracing of Conic)

9·1. கூம்பு வெட்டியின் மையத் தொலை விகிதம் e ஒன்றுக்குச் சமமாகவோ, குறைவாகவோ, அதிகமாகவோ இருப்பின், கூம்பு வெட்டி ஒரு பரவளைவு, நீள் வட்டம் அல்லது அதி பரவளைவு என நாம் முன்னர்க் கண்டோம்.

மையத் தொலை விகிதம் $e=0$ எனின், $b^2=a^2(1-e^2)$ என்பது $b^2=a^2$ என்றாகும். இக்கட்டுப்பாட்டில் நீள் வட்டம் வட்டமாகிறது. மேலும் குவியம் இயக்கு வரையில் பொருந்துமெனின், கூம்பு வெட்டி இரட்டைக் கோடுகளாகின்றது. நீள் வட்டத்தில் அச்சுக்களின் நீளங்கள் பூச்சியமெனின், நீள் வட்டம் ஒரு புள்ளியாகும். எனவே வட்டம், இரட்டைக் கோடுகள், புள்ளி ஆகியவைகளும் கூம்பு வெட்டிகளாகும்.

9·2. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற சமன்பாடு எப்பொழுதும் ஒரு கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

x, y ஆயங்களைப் பொறுத்து இருபடியின் பொதுச் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \dots \quad (1)$$

ஆதியை மாற்றாமல் ஆயங்களை θ கோணம் சுழற்றினால் கிடைக்கும் ஆயங்கள் X, Y ஆயங்கள் எனக் கொள்வோம்.

பின், புது ஆயங்களைப் (X, Y) பொறுத்து இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு

$$a(X\cos\theta - Y\sin\theta)^2 + 2h(X\cos\theta - Y\sin\theta)(X\sin\theta + Y\cos\theta)$$
$$+\ b(X\sin\theta + Y\cos\theta)^2 + 2g(X\cos\theta - Y\sin\theta)$$
$$+\ 2f(X\sin\theta + Y\cos\theta) + c = 0 \quad \ldots \quad (2)$$

என்றாகும். ... ... [பத்தி 8·5]

(அ-து) $AX^2 + 2HXY + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0$.

இங்கு $A = a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta$.

$H = -(a-b)\sin\theta\cos\theta + h(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$.

$B = a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta$.

சமன்பாடு (2)-இல் XY-யின் கெழு $2H$ ஆகும்.

$2H = 0$ எனின்,

$$2(b-a)\sin\theta\cos\theta + 2h(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 0$$

(அ-து) $(b-a)\sin 2\theta + 2h(\cos 2\theta) = 0$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(அ-து)} \quad \tan 2\theta = \frac{2h}{a-b}. \\ &\text{(அ-து)} \quad \theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right) \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (3)$$

எனவே, $\theta = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2h}{a-b}\right)$ எனின், சமன்பாடு (2)-இல் xy கொண்ட உறுப்பு இராது.

பின் சமன்பாடு (2)

$$AX^2 + BY^2 + 2GX + 2FY + C = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

என்றாகும்.

$$\begin{aligned} A+B &= (a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta) \\ &\quad + (a\sin^2\theta - 2h\sin\theta\cos\theta + b\cos^2\theta) \\ &= a(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b(\sin^2\theta + \cos^2\theta) \\ &= a + b. \end{aligned}$$

இவ்வாறே $H^2-AB = h^2-ab$ என நிறுவலாம்.

வகை (i) $A=B$ எனின், சமன்பாடு (4) ஒரு வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வகை (ii) $AB \neq 0$ (அ-து) $ab-h^2 \neq 0$.

சமன்பாடு (4)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம் :

$$A\left(x^2+\frac{2G}{A}x\right)+B\left(y^2+\frac{2F}{B}y\right)+C=0$$

(அ-து) $$A\left(x^2+\frac{2G}{A}x+\frac{G^2}{A^2}\right)+B\left(y^2+\frac{2F}{B}y+\frac{F^2}{B^2}\right)$$

$$= G^2+F^2-C$$

$$= K \text{ (என்க).}$$

(அ-து) $$A\left(x+\frac{G}{A}\right)^2+B\left(y+\frac{F}{B}\right)^2=K.$$

ஆதியை $\left(-\frac{G}{A},\ -\frac{F}{B}\right)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால்,

$$AX^2+BY^2=K \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (5)$$

என்றாகும்.

$K=0$ எனின், $\quad Ax^2+BY^2=0.$

$\therefore$ சமன்பாடு இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கும்.

A, B இரண்டும் அதே குறியைக் கொண்டிருப்பின் இரட்டைக் கோடுகள் கற்பனையாகும். A, B இரண்டும் எதிரெதிர்க் குறிகளைக் கொண்டிருப்பின் இரட்டைக் கோடுகள் மெய்யானவை.

$K \neq 0$ எனின், சமன்பாடு (5)

$$\frac{X^2}{\frac{K}{A}}+\frac{Y^2}{\frac{K}{B}}=1 \text{ என்றாகும்.}$$

இதில் $\frac{K}{A}$, $\frac{K}{B}$ இரண்டும் நேர்க்குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், சமன்பாடு (5) ஒரு நீள் வட்டத்தையும், இரண்டிலொன்று நேர்க் குறியும் மற்றொன்று எதிர் குறியும் கொண்டிருப்பின் ஓர் அதிபரவளைவையும் குறிக்கும்.

அதாவது $ab - h^2 > 0$, (அ-து) $AB > 0$ எனின் நீள் வட்டமும், $ab - h^2 < 0$, (அ-து) $AB < 0$ எனின் அதிபரவளைவும் ஆகும்.

$$\frac{K}{A} = -\frac{K}{B} \text{ எனின், (அ-து) } A + B = 0.$$

$(a + b = 0)$ எனின், சமன்பாடு (5) ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$\frac{K}{A}$, $\frac{K}{B}$ இரண்டும் எதிர்க் குறிகளைக் கொண்டிருப்பின், சமன்பாடு (5) ஒரு கற்பனை நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

வகை (iii) :

$$ab - h^2 = 0 \quad \text{(அ - து)} \quad AB = 0.$$

$$A = 0,\ B \neq 0 \text{ எனக் கொள்வோம்.}$$

எனவே, சமன்பாடு (4)

$$By^2 + 2Fy = -2Gx - C \text{ என்றாகும்.}$$

$$\text{(அ - து)} \quad B\left(y^2 + \frac{2F}{B}y + \frac{F^2}{B^2}\right) = \frac{F^2}{B} - 2Gx - C.$$

$$\therefore \quad B\left(y + \frac{F}{B}\right)^2 = \frac{F^2}{B} - 2Gx - C \quad \dots \quad (6)$$

$G = 0$ எனின்,

$$B\left(y + \frac{F}{B}\right)^2 = \frac{F^2}{B} - C.$$

எனவே, சமன்பாடு (4) இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$G = 0, \ \frac{F^2}{B} - C = 0$ எனின்,

சமன்பாடு $B\left(y + \frac{F}{B}\right)^2 = 0$ ஆகும்.

இவ் வகையில் அஃது இரு பொருந்தும் கோடுகளைக் குறிக்கும்.

$G \neq 0$ எனின்,

சமன்பாடு (6)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

(அ - து) $B\left(y + \frac{F}{B}\right)^2 = -2G\left(x + \frac{C}{2G} - \frac{F^2}{2BG}\right)$

என்றாகும். ... ... (7)

ஆதியை $\left(\frac{F^2}{2BG} - \frac{C}{2G}, -\frac{F}{B}\right)$ புள்ளிக்குச் மாற்றச்

சமன்பாடு (7),

$BY^2 = -2GX$ என்றாகும்.

(அ - து) $Y^2 = -\frac{2G}{B}X$.

இவ்வகையில் இஃது ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

எனவே, எல்லா வகைகளிலும்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

ஒரு கூம்பு வெட்டியைக் குறிக்கும்.

9·3. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையம்

கூம்பு வளைவின் மையம் (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம். ஆயங்களின் போக்கை மாற்றாமல் ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றினால்,

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு

$$a(x+x_1)^2 + 2h(x+x_1)(y+y_1) + b(y+y_1)^2$$
$$+ 2g(x+x_1) + 2f(y+y_1) + c = 0$$ என்றாகும்.

(அ-து) $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c+ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+2axx_1+2h(xy_1+x_1y)+2byy_1=0$.

(அ-து) $ax^2+2hxy+by^2+2x(ax_1+hy_1+g)+2y(hx_1+by_1+f)+(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)=0$ ... ... (2)

மையம் ஆதியாதலின், x, y கொண்ட உறுப்புக்களின் கெழுக்கள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore\ ax_1+hy_1+g=0$$

$$hx_1+by_1+f=0.$$

$$\therefore\ \frac{x_1}{hf-bg}=\frac{y_1}{gh-af}=\frac{1}{ab-h^2}.$$

(அ-து) $x_1=\dfrac{hf-bg}{ab-h^2}$

$$y_1=\frac{gh-af}{ab-h^2}.$$

எனவே, $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் மையம்

$$\left(\frac{h-bg}{ab-h^2},\ \frac{gh-af}{ab-h^2}\right).$$

$ab-h^2=0$ எனின், மையத்தின் ஆயத்தொலைகள் கந்தழி மதிப்புடையதாகும்.

(அ-து) கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

குறிப்பு : $F(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c$ எனின், கூம்பு வளைவின் மையம்

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ என்ற சமன்பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

9·4. ஆதியை மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவின் மையம் (x_1, y_1) எனின்,

$$ax_1 + hy_1 + g = 0$$

$$hx_1 + gy_1 + f = 0$$

ஆதியை (x_1, y_1) புள்ளிக்கு மாற்றச் சமன்பாடு (1),

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2x(ax_1 + hy_1 + g) + 2y(hx_1 + by_1 + f)$$
$$+ ax_1{}^2 + 2hx_1y_1 + by_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0 \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad ax_1{}^2 + 2hx_1y_1 + by_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$
$$= x_1(ax_1 + hy_1 + g) + y_1(hx_1 + by_1 + f)$$
$$+ gx_1 + fy_1 + c$$

$$= gx_1 + fy_1 + c \qquad \left[\begin{array}{l} \because \; ax_1 + hy_1 + g = 0 \\ \quad\; hx_1 + by_1 + f = 0 \end{array}\right]$$

$$= g\left(\frac{hf - bg}{ab - h^2}\right) + f\left(\frac{gh - af}{ab - h^2}\right) + c$$

$$= \frac{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2}{ab - h^2}$$

$$= \frac{\Delta}{ab - h^2} \qquad [\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2]$$

$$= c_1.$$

$\therefore$ ஆதியை மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

இங்கு $c_1 = gx_1 + fy_1 + c$

$$= \frac{\Delta}{ab - h^2}.$$

$$\Delta = abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2.$$

குறிப்பு 1 : $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்குமெனின், $ax^2+2hxy+by^2+\frac{\Delta}{ab-h^2}=0$ ஆதிவழிச் செல்லும் இரட்டைக் கோடுகளைக் குறிக்கும். எனவே, இச்சமன்பாடு சமபடித்தான சமன்பாடாக இருத்தல் வேண்டும்.

$$\therefore \quad \Delta = 0$$

(அ-து) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ ஆகும்.

$\therefore \quad ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ இரட்டைக்கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0.$$

குறிப்பு 2 : ஆதியை மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+c_1=0$$

இதை $-c_1$ ஆல் வகுப்பின்,

$$\frac{a}{-c_1}x^2+\frac{2h}{-c_1}xy+\frac{b}{-c_1}y^2=1$$

(அ-து) $a'x^2+2h'xy+b'y^2=1$

என்ற வடிவைப் பெறும்.

இங்கு $a'=-\frac{a}{c_1}$

$$h'=-\frac{h}{c_1}$$

$b'=-\frac{b}{c_1}$ ஆகும்.

9·5. $f(x,y)\equiv ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ எனும் இருபடிப் பொதுச் சமன்பாடு

(i) $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ எனின், இரட்டைக் கோடுகளை

(ii) $a=b$, $h=0$ எனின், ஒரு வட்டத்தை

(iii) $ab - h^2 = 0$ எனின், பரவளைவை

(iv) $ab - h^2 > 0$ எனின், நீள் வட்டத்தை

(v) $ab - h^2 < 0$ எனின், அதி பரவளைவை

(vi) $a + b = 0$ எனின், செவ்வக அதி பரவளைவைக் குறிக்கும்.

மீண்டும், $f(x, y) \equiv ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்பு வளைவின் மையம் $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்ற சமன்பாடு களிலிருந்து கிடைக்கப் பெறும்.

மேலும், ஆதியை மையத்திற்கு மாற்றிஞல், சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + c_1 = 0 \qquad (c_1 = gx_1 + fy_1 + c)$$

என்ருகும்.

மாதிரி 1 :

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையைக் காண்க.

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0$$

$$a = 36,\ 2h = 24,\ b = 29,\ 2g = -72,\ 2f = 126,\ c = 81,$$

$$ab - h^2 = 36.29 - 12^2 = 1044 - 144 = 900 > 0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = 36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 72x + 24y - 72$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\ 24x + 58y + 126.$$

கூம்பு வளைவின் மையம் $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ என்ற சமன் பாடுகளிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$\therefore \quad 72x+24y-72=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$

$24x+58y+126=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$

(1)-இலிருந்து $24x+8y-24=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$

(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின்

$$50y=-150.$$

$$\therefore \quad y=-3.$$

$$24x=24-8y=24+24=48.$$

$$\therefore \quad x=2$$

எனவே, கூம்பு வளைவின் மையம் (2, −3).

ஆதியை (2, −3) புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு

$36x^2+24xy+29y^2+c_1=0$ என்றாகும்.

$$\begin{aligned} c_1 &= gx_1+fy_1+c \\ &= -36(2)+63(-3)+81 \\ &= -72-189+81 \\ &= -180. \end{aligned}$$

எனவே, புது ஆயங்களைப் பொறுத்து நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$36x^2+24xy+29y^2=180$$

(அ-து) $\dfrac{36}{180}x^2+\dfrac{24}{180}xy+\dfrac{29}{180}y^2=1.$

மாதிரி 2 : $x^2+24xy-6y^2+28x+36y+16=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்க.

$$f(x, y) \equiv x^2+24xy-6y^2+28x+36y+16.$$

$$a=1,\ 2h=24,\ b=6,\ 2g=28,\ 2f=36,\ c=16.$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad ab-h^2 &= 1(-6)-12^2=-6-144 \\ &= -150<0. \end{aligned}$$

எனவே, சமன்பாடு ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 24y + 28$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 24x - 12y + 36$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \text{ எனின்,}$$

$$2x + 24y + 28 = 0$$

(அ - து) $x + 12y + 14 = 0$ ... ... (1)

$24x - 12y + 36 = 0$ ... ... (2)

(1)-ஐயும் (2)-ஐயும் கூட்டினால்,

$$25x = -50$$

$$\therefore \ x = -2.$$

(1)-இல் $x = -2$ எனப் பிரதியிடின்,

$$-2 + 12y + 14 = 0$$

(அ - து) $12y = -12$

$$\therefore \ y = -1.$$

எனவே, அதிபரவளைவின் மையம் $(-2, -1)$.

ஆதியை $(-2, -1)$ புள்ளிக்கு மாற்றினால் சமன்பாடு

$x^2 + 24xy - 6y^2 + c_1 = 0$ ... (3)

என்றாகும்.

$$\begin{aligned} c_1 &= gx_1 + fy_1 + c \\ &= 14(-2) + 18(-1) + 16 \\ &= -28 - 18 + 16 \\ &= -30. \end{aligned}$$

எனவே, புது ஆயங்களைச் சார்ந்த அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 + 24xy - 6y^2 = 80$$

$$(\text{அ-து})\ \frac{x^2}{80} + \frac{24}{80}xy - \frac{6}{80}y^2 = 1.$$

9·6. ஆதியை மையமாகக் கொண்ட கூம்பு வளைவின் அச்சுக்களின் நிலையும், நீளங்களும்.

மையம் கூம்பு வளைவின் (central conic) சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = 1 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

ஆதியை மையமாகவும், r அலகும் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

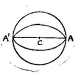
$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

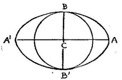
வளைவுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளிகளை மையத்துடன் சேர்க்கும் இரட்டைக்கோடுகளின் சேர்ந்த சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 = \frac{x^2 + y^2}{r} \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

ஆகும்.



படம் 88 (i)



படம் 88 (ii)

வட்ட ஆரம் அரை அச்சுக்களில் யாதேனும் ஒன்றுக்குச் சமமெனின், சமன்பாடு (3) குறிக்கும் இரட்டைக் கோடுகள் பொருந்தும் கோடுகளாம். இரட்டைக் கோடுகள் பொருந்தும் கோடுகளாவதற்குத் தக்க ஆரம் r-இன் மதிப்பைக் கொண்டால், கிடைக்கும் சமன்பாட்டிலிருந்து அச்சுக்களின் நீளங்கள் அறியலாம்.

சமன்பாடு (3)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி அமைக்கலாம்:

$$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)x^2 + 2hxy + \left(b-\frac{1}{r^2}\right)y^2 = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

சமன்பாடு (4) பொருந்தும் கோடுகளைக் குறிக்கத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)\left(b-\frac{1}{r^2}\right) - h^2 = 0 \quad \ldots \quad (5)$$

ஆகும்.

இது r^2-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், r^2-க்கு இரு மதிப்புக்கள் உண்டு. அவை $r_1{}^2$, $r_2{}^2$ எனக் கொள்வோம். $r_1{}^2$, $r_2{}^2$ நேர் மதிப்புக்கள் கொண்டிருப்பின், நீள் வட்டத்தின் அச்சுக்கள் கிடைக்கப் பெறும். $r_1 > r_2$ எனின்,

பேரச்சின் நீளம் $2r_1$

சிற்றச்சின் நீளம் $2r_2$.

$r_1{}^2$, $r_2{}^2$ மதிப்புக்களிலொன்று நேர் எண்ணுகவும், மற்றொன்று குறை எண்ணுகவு மிருப்பின், அதிபரவளைவின் அச்சுக்கள் கிடைக்கப் பெறும். $r_1{}^2 > 0$, $r_2{}^2 < 0$ எனின்,

குறுக்கச்சின் நீளம் $2r_1$

துணையச்சின் நீளம் $2\sqrt{|r_2{}^2|}$.

சமன்பாடுகள் (4), (5)-ஐ இணைப்பின்

$$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)x^2 + 2hxy + \left(\frac{h^2}{a-\frac{1}{r^2}}\right)y^2 = 0$$

(அ-து) $$\left(a-\frac{1}{r^2}\right)^2 x^2 + 2h\left(a-\frac{1}{r^2}\right)xy + h^2y^2 = 0$$

(அ-து) $$\left[\left(a-\frac{1}{r^2}\right)x + hy\right]^2 = 0.$$

எனவே, நீளம் $2r_1$ கொண்ட அச்சின் சமன்பாடு,

$$\left(a-\frac{1}{r_1{}^2}\right)x + hy = 0.$$

நீளம் $2r_2$ கொண்ட அச்சின் சமன்பாடு

$$\left(a-\frac{1}{r_2^{\,2}}\right)x+hy=0.$$

மாதிரி 3 : $8x^2+12xy+17y^2+4x-22y-7=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்ந்து அதன் மையம், அச்சுக்கள் தம் நீளங்கள் சமன்பாடுகள் காண்க.

$$f(x, y)=8x^2+12xy+17y^2+4x-22y-7=0.$$

$$a=8,\ 2h=12,\ b=17$$

$$2g=4,\ 2f=-22,\ c=-7.$$

$$\therefore \quad ab-h^2=8.17-6^2$$

$$=136-36$$

$$=100>0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு நீள் வட்டமாகும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x+12y+4.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=12x+34y-22$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ எனின்,}$$

$$16x+12y+4=0$$

$$12x+34y-22=0.$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள், $x=-1,\ y=1$

எனவே, நீள் வட்டத்தின் மையம் $(-1,\ 1)$.

ஆதியை மையம் $(-1,\ 1)$-க்கு மாற்றினுல்,

$$8x^2+12xy+17y^2+c_1=0.$$

$$c_1=gx_1+fy_1+c$$

$$=2(-1)+(-11)1+(-7)$$

$$=-2-11-7=-20.$$

எனவே, மையக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

(அ-து) புது ஆயங்களைச் சார்ந்த நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$8x^2 + 12xy + 17y^2 = 20$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{8}{20}x^2 + \frac{12}{20}xy + \frac{17}{20}y^2 = 1.$$

அச்சுக்களின் நீளங்கள்

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)\left(B - \frac{1}{r^2}\right) = 4^2$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}(A+B) + (AB - 4^2) = 0.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{8}{20} + \frac{17}{20}\right) + \left(\frac{8}{20}\cdot\frac{17}{20} - \frac{6^2}{20^2}\right) = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad 400 - 500r^2 + 100r^4 = 0$$

$$\therefore \quad r^4 - 5r^2 + 4 = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad (r^2 - 4)(r^2 - 1) = 0$$

எனவே, $r = \pm 2, \quad r = \pm 1.$

$\therefore$ பேரச்சின் நீளம் $2r_1 = 2.2 = 4.$

சிற்றச்சின் நீளம் $2r_2 = 2.1 = 2.$

பேரச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + 4y = 0$$

$$\text{(அ-து)} \quad \left(\frac{8}{20} - \frac{1}{4}\right)x + \frac{6}{20}y = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad 3x + 6y = 0.$$

$$\therefore \quad x + 2y = 0.$$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துச் பேரச்சின் சமன்பாடு

$$(x+1)+2(y-1)=0$$

(அ - து) $x+2y-1=0.$

சிற்றச்சு, பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாயிருப்பதால், அதன் சமன்பாடு

$2x-y=K$ வடிவில் இருக்கும்.

இது மையம் $(-1,\ 1)$ புள்ளி வழிச் செல்லுவதால்

$$-2-1=K.$$

$$\therefore \quad K=-3.$$

எனவே, சிற்றச்சின் சமன்பாடு

$$2x-y+3=0.$$

மாதிரி 4 : $8x^2-24xy+15y^2+48x-48y=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் தன்மையை ஆராய்ந்து, அதன் மையமும், அச்சுக்கள்தம் சமன்பாடுகளும், நீளங்களும் காண்க.

$$F(x,y)=8x^2-24xy+15y^2+48x-48y.$$

$$a=8,\quad h=-12,\quad b=15,$$

$$g=24,\ f=-24.$$

$$ab-h^2=8.15-144=-24<0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=16x-24y+48$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=-24x+30y-48.$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}=0$ எனின்,

$$16x-24y+48=0$$

$$-24x+30y-48=0.$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் $x = 3, \quad y = 4.$

எனவே, அதிபரவளேவின் மையம் (3, 4).

ஆதியை மையத்திற்கு மாற்றினுல், மையக் கூம்பு வளேவின் சமன்பாடு (அ-து) அதி ஆயங்களேச் சார்ந்து அதிபரவளேவின் சமன்பாடு

$$8x^2 - 24xy + 15y^2 + c_1 = 0$$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$

$$= 24.3 + (-24)4$$

$$= 72 - 96 = -24.$$

$\therefore$ சமன்பாடு $8x^2 - 24xy + 15y^2 = 24$

(அ-து) $\dfrac{8}{24}x^2 - \dfrac{24}{24}xy + \dfrac{15}{24}y^2 = 1.$

அச்சுக்களின் நீளம்

$$\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}(A + B) + (AB - 4^2) = 0.$$

$$\frac{1}{r^4} - \frac{1}{r^2}\left(\frac{8}{24} + \frac{15}{24}\right) + \left(\frac{8.15}{24^2} - \frac{12^2}{24^2}\right) = 0$$

(அ-து) $\dfrac{1}{r^4} - \dfrac{23}{24}\cdot\dfrac{1}{r^2} - \dfrac{1}{24} = 0$

(அ-து) $24 - 23r^2 - r^4 = 0.$

$\therefore \quad r^2 + 23r^2 - 24 = 0.$

$\therefore \quad (r^2 - 1)(r^2 + 24) = 0.$

எனவே, $r^4 = \pm 1, \quad r^2 = \pm\sqrt{-24}.$

எனவே, குறுக்கச்சின் நீளம் $2r_1 = 2.1 = 2.$

துணையச்சின் நீளம் $2r_2 = 2.2\sqrt{6} = 4\sqrt{6}.$

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + 4y = 0$$

(அது) $\left(\frac{8}{24} - \frac{1}{1}\right)x - \frac{12}{24}y = 0.$

$\therefore\ 4x + 3y = 0.$

பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் குறுக்கச்சின் சமன்பாடு, $4(x-3) + 3(y-4) = 0$

(அ-து) $4x + 3y - 24 = 0.$

துணையச்சின் சமன்பாடு

$3x - 4y = K$ வடிவிலிருக்கும்.

இது $(3, 4)$ புள்ளி வழிச் செல்லின்

$3.3 - 4.4 = K.$

$\therefore\ K = -7.$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துத் துணையச்சின் சமன்பாடு $3x - 4y + 7 = 0.$

9·7. $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ என்ற பரவளைவின் முனையும் அச்சும் காணுதல்

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \ldots \quad (1)$$

சமன்பாடு (1) பரவளைவைக் குறிக்குமெனின்,

$h^2 - ab = 0.$

எனவே, இருபடியிலுள்ள உறுப்புக்கள் முழு வர்க்கமாகும்.

$a = \alpha^2$, $b = \beta^2$ எனக் கொண்டால்,

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$(\alpha x + \beta y)^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

(அ-து) $(\alpha x + \beta y + \lambda)^2 = 2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + \lambda^2 - c \ \ldots \quad \ldots \quad (2)$

பரவளேவின் செவ்வகல நீளம் K எனக் கொள்வோம். பின், பரவளேவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளிக்குப் பரவளேவின் அச்சிலிருந்து உள்ள தூரம், அப் புள்ளிக்குப் பரவளேவின் முனேயிடத்துத் தொடுகோட்டிலிருந்து உள்ள தூரத்தின் K மடங்கு என நாம் அறிவோம். மேலும் அச்சும், முனையிடத்துத் தொடுகோடும் தம்முள் செங்குத்தாதலின்,

$$\alpha x + \beta y + \lambda = 0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$2x(\alpha\lambda - g) + 2y(\beta\lambda - f) + \lambda^2 - c = 0 \quad \ldots \quad (4)$$

கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாயிருக்கத் தக்கவாறு λ-வின் மதிப்பைக் கொள்வோம்.

கோடு (3)-இன் சரிவு $= -\dfrac{\alpha}{\beta}$.

கோடு (4)-இன் சரிவு $= -\left(\dfrac{\lambda\alpha - g}{\lambda\beta - f}\right)$.

$$\therefore \quad \left(-\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(-\frac{\lambda\alpha - g}{\lambda\beta - f}\right) = -1$$

(அ - து) $\alpha(\lambda\alpha - g) + \beta(\lambda\beta - f) = 0$.

$$\therefore \quad \lambda(\alpha^2 + \beta^2) = g\alpha + f\beta.$$

எனவே, $\lambda = \dfrac{g\alpha + f\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$.

$\therefore$ சமன்பாடு (2)-ஐக் கீழ்க் கண்டவாறு மாற்றி எழுதினால்

$$\left[\frac{\alpha x + \beta y + \lambda}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}\right]^2 (\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})^2$$

$$= 2\left\{\frac{x(\alpha\lambda - g) + y(\beta\lambda - f) + \frac{1}{2}(\lambda^2 - c)}{\sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}}\right\}$$

$$\times \sqrt{(\alpha\lambda - g)^2 + (\beta\lambda - f)^2}$$

(அ - து) $$\left[\frac{\alpha x+\beta y+\lambda}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right]^2 = \frac{2\sqrt{(\alpha\lambda-g)^2+(\beta\lambda-f)^2}}{\alpha^2+\beta^2} \times \left\{\frac{x(\alpha\lambda-g)+y(\beta\lambda-f)+\frac{1}{2}(\lambda^2-c)}{\sqrt{(\alpha\lambda-g)^2+(\beta\lambda-f)^2}}\right\}.$$

அச்சின் சமன்பாடு $\alpha x + \beta y + \lambda = 0$.

முனையிடத்துத் தொடு கோடு

$$(\alpha\lambda-g)x+(\beta\lambda-f)y+\frac{1}{2}(\lambda^2-c) = 0.$$

செவ்வகல நீளம் $\dfrac{2\sqrt{(\alpha\lambda-g)^2+(\beta\lambda-f)^2}}{\alpha^2+\beta^2}$ என்றுகும்.

இங்கு $\lambda = \dfrac{g\alpha+f\beta}{\alpha^2+\beta^2}$.

9·8. கூம்பு வளைவின் மையத் தொலை விகிதம்

நீள் வட்டத்தின் மையத் தொலை விகிதம் e, $b^2 = a^2(1-e^2)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்தும், அதி பரவளைவின் மையத்தொலை விகிதம் $b^2 = a^2(e^2-1)$ என்ற சமன்பாட்டிலிருந்தும் கிடைக்கப் பெறும்.

$\therefore$ நீள் வட்டத்தின் மையத் தொலை விகிதம்

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2-b^2}{a^2} = \frac{r_1{}^2-r_2{}^2}{r_1{}^2}.$$

அதி பரவளைவின் மையத் தொலை விகிதம்

$$e^2 = 1 + \frac{b^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = \frac{r_1{}^2+r_2{}^2}{r_1{}^2}.$$

9·9. குவியங்களின் ஆயத் தொலைகள்

ஒரு கூம்பு வளைவின் குவியங்கள் அவ் வளைவு பேரச்சு (அ-து) குறுக்கச்சின்மீது அதன் மையத்திலிருந்து ae தூரத்தில் இரு பக்கங்களிலும் உள்ளது. இவ் வச்சு x ஆயத்துடன் சாய்ந்துள்ள கோணம் θ எனவும், கூம்பு வளைவின் மையம் (x_1, y_1) எனவும்

கொண்டால் குவியங்களின் ஆயத் தொலைகள் $(x_1+er_1\cos\theta, y_1+er_1\sin\theta)$, $(x_1-er_1\cos\theta, y_1-er_1\sin\theta)$ ஆகும். இங்கு r_1, பேரச்சு (அ-து) குறுக்கச்சின் நீளத்தில் பாதியாகும்.

மாதிரி 5: $4x^2-4xy+y^2-8x-6y+5=0$ என்ற கூம்பு வளையின் தன்மையை ஆராய்ந்து வரைக.

$$4x^2-4xy+y^2-8x-6y+5=0 \qquad \ldots \qquad (1)$$

$$a=4,\ h=-2,\ b=1$$

$$g=-4,\ f=-3,\ c=5.$$

$$ab-h^2=4.1-4=0.$$

எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளைவு ஆகும்.

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$4x^2-4xy+y^2=8x+6y-5$$

$$(2x-y)^2=8x+6y-5$$

$$(2x-y+\lambda)^2=8x+6y-5+4\lambda x-2\lambda y+\lambda^2$$
$$=x(8+4\lambda)+y(6-2\lambda)$$
$$+(\lambda^2-5) \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$2x-y+\lambda=0$$

$$(8+4\lambda)x+(6-2\lambda)y+(\lambda^2-5)=0$$

கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனின்,

$$2(8+4\lambda)-1(6-2\lambda)=0$$

(அ - து) $10\lambda+10=0.$

$\therefore \quad \lambda=-1.$

இம் மதிப்பைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$(2x-y-1)^2=4(x+2y-1)$$

(அ - து) $\left(\dfrac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right)^2 5=4\left(\dfrac{x+2y-1}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{5}.$

$$\therefore \quad \left(\frac{2x-y-1}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}\left(\frac{x+2y-1}{\sqrt{5}}\right)$$

அ - து) $Y^2 = 4aX$.

$$\therefore \quad 4a = \frac{4}{\sqrt{5}} \qquad \therefore \; a = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

எனவே, செவ்வகலத்தின் நீளம் $\frac{4}{\sqrt{5}}$.

பரவளைவின் அச்சு $Y = 0$

(அ - து) $2x - y - 1 = 0$.

முனையிடத்துத் தொடுகோடு $X = 0$

(அ - து) $x + 2y - 1 = 0$.

பரவளைவின் முனை $(X = 0, Y = 0)$

(அ - து) $x + 2y - 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$.

எனவே முனை $\left(\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

சமன்பாடு (1)-இல் $y=0$ எனப் பிரதியிடின், அது $4x^2-8x+5=0$ என்றாகும். இதன் மூலங்கள் கற்பனையாதலின் பரவளைவு x ஆயத்தை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது.

சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப் பிரதியிடின், அது $y^2 - 6y + 5 = 0$ என்றாகும்.

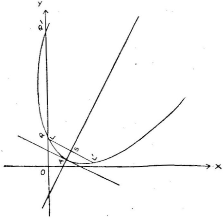
(அ - து) $(y-1)(y-5) = 0$.

எனவே, பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 1)$, $Q'(0, 5)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

பரவளைவின் படம் வரைய முதலில் அதன் அச்சையும், முனையிடத்துத் தொடுகோடும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி பரவளைவின் முனையாகும். பரவளைவு x ஆயத்தை வெட்டாது. அது y ஆயத்தை வெட்டும் புள்ளிகளான $Q(0, 1)$,

$Q'(0, 5)$–ஐக் குறிக்கவும். அச்சின் மீது பரவளைவின் முனை A-யிலிருந்து $\frac{1}{\sqrt{5}}$ தூரத்தில் S என்ற புள்ளியைக் குறிக்கவும். அச்சுக்குச் செங்குத்தாக S வழி ஒரு நேர்க்கோடு வரைந்து, அதன்மீது L, L' புள்ளிகளை $SL = SL' = \frac{2}{\sqrt{5}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். S பரவளைவின் குவியமாகும். L, L' புள்ளிகள் செவ்வகலத்தின் முனைகளாகும். பரவளைவு L', A, L, Q, Q' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும்.

பரவளைவு



படம் 89

$$A\left(\frac{8}{5}, \frac{1}{5}\right), \quad Q(0, 1), \quad Q'(0, 5)$$

$$AS = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad SL = SL' = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

மாதிரி 6 : $16x^2-24xy+9y^2-104x-172y+44=0$ என்ற கூம்பு வளைவை ஆராய்ந்து படம் வரைக.

$$16x^2-24xy+9y^2-104x-172y+44=0 \quad \ldots(1)$$

$$a=16,\ h=-12,\ b=9$$

$$g=-52,\ f=-86,\ c=44.$$

$$ab-h^2+16.9-144=0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$16x^2-24xy+9y^2=104x+172y-44$$

$$(4x-3y)^2=104x+172y-44$$

$$\begin{aligned}(4x-3y+\lambda)^2 &= 104x+172y-44+8\lambda x-6\lambda y+\lambda^2\\ &= x(104+8\lambda)+y(172-6\lambda)\\ &\quad +(\lambda^2-44) \quad \ldots (2)\end{aligned}$$

$$4x-3y+\lambda=0$$

$$x(104+8\lambda)+y(172-6\lambda)+(\lambda^2-44)=0$$

கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனின்,

$$4(104+8\lambda)-3(172-6\lambda)=0$$

(அ-து) $416+32\lambda-516+18\lambda=0.$

$$\therefore\ 50\lambda=100.$$

$$\therefore\ \lambda=2.$$

இம்மதிப்பைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$\begin{aligned}(4x-3y+2)^2 &= 120x+160y-40\\ &= 40(3x+4y-1).\end{aligned}$$

$$\therefore\ \left(\frac{4x-3y+2}{5}\right)^2 25 = 40\left(\frac{3x+4y-1}{5}\right)5$$

$\therefore \quad \left(\frac{4x-3y+2}{5}\right)^2 = 8\left(\frac{3x+4y-1}{5}\right)$

(அ-து) $\quad Y^2 = 4aX.$

$\therefore \quad a = 2.$

எனவே, செவ்வகலத்தின் நீளம் $4.2 = 8$.

பரவளைவின் அச்சு $Y = 0$

(அ - து) $\quad 4x - 3y + 2 = 0.$

முனையிடத்துத் தொடுகோடு $X = 0$

(அ - து) $\quad 3x + 4y - 1 = 0.$

பரவளைவின் முனை $(X = 0,\ Y = 0)$

(அ - து) $\quad [3x + 4y - 1 = 0,\ 4x - 3y + 2 = 0]$

(அ - து) $\quad \left(-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right).$

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$16x^2 - 104x + 44 = 0$$

(அ - து) $\quad 4x^2 - 26x + 11 = 0.$

$\therefore \quad x = 6{\cdot}1$

$x = {\cdot}5$ (தோராயமாக).

எனவே, பரவளைவு x ஆயத்தை $P({\cdot}5,\ 0),\ P'(6{\cdot}1,\ 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

சமன்பாடு (1)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$9y^2 - 172y + 44 = 0.$$

$\therefore \quad y = 0{\cdot}3$

$y = 19$ (தோராயமாக).

எனவே, பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 0\cdot3)$, $Q'(0, 19)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

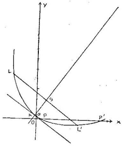
பரவளைவுப் படம் வரைய, முதலில் பரவளைவின் அச்சையும், முனையிடத்துத் தொடுகோடும் வரைக. இவைகள் வெட்டும் புள்ளி A, பரவளைவின் முனையாகும்.

பரவளைவு x ஆயத்தை $P(\cdot5, 0)$, $P'(6\cdot1, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, x ஆயத்தின் மீது $P. P'$ புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். பரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, 0\cdot3)$, $Q'(0, 19)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. எனவே, y ஆயத்தின் மீது Q, Q' புள்ளிகளைக் குறிக்கவும்.

பரவளைவின் முனை A-யிலிருந்து அதன் அச்சின் மீது S புள்ளியை $AS = 2$ என்ற கட்டுப்பாட்டில் குறிக்கவும். S புள்ளியிலிருந்து பரவளைவின் அச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மீது L, L' புள்ளிகளை $SL = SL' = 4$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

S பரவளைவின் குவியம் L, L' புள்ளிகள் செவ்வகலத்தின் நுனிகளாகும்.

பரவளைவு A, P, Q, P', Q', L, L' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும். படம் தோராயமாகப் பின் வருமாறு இருக்கும்.



படம் 90

பரவளைவு

$$A\left[-\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right],\ P(\cdot 5,\ 0),\ P'(6\cdot 1,\ 0),$$

$$Q(0,\ 0\cdot 3),\ Q'(0,\ 19).\quad AS=2;\ SL=SL'=4.$$

மாதிரி 7 : $36x^2+24xy+29y^2-72x+126y+81=0$ என்ற கூம்பு வளைவினை ஆராய்ந்து படம் வரைக.

$$F(x,y)=36x^2+24xy+29y^2-72x+126y+81=0(1).$$

$$a=36,\ h=12,\ b=29,\ g=-36,\ f=63,\ c=81.$$

$$ab-h^2=36.29-12^2$$

$$=1044-144$$

$$=900>0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

$$\frac{\partial f}{\partial x}=72x+24y-72$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=24x+58y+126.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0,\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \text{ எனின்,}$$

$$72x+24y-72=0$$

$$24x+58y+126=0.$$

இச் சமன்பாடுகளின் தீர்வுகள் நீள் வட்டத்தின் மையமாகும்.

$\therefore$ நீள் வட்டத்தின் மையம் $(2,\ -3)$.

ஆதியை மையத்திற்கு மாற்றினால் சமன்பாடு (1)

$36x^2+24xy+29y^2+c_1=0$ என்றாகும்.

$$c_1=gx_1+fy_1+c$$

$$=(-36).2+63(-3)+81$$

$$=-72-189+81=-180.$$

எனவே, மையக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு (அ-து) புதிய ஆயங்களைப் பொறுத்த நீள் வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180$$

$$\text{(அ-து)} \quad \frac{36}{180}x^2 + \frac{24}{180}xy + \frac{29}{180}y^2 = 1 \quad \ldots \quad (2)$$

பேரச்சு, சிற்றச்சு ஆகியவைகளின் நீளங்கள் பின்வரும் சமன்பாட்டிலிருந்து கிடைக்கப்பெறும்.

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)\left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2.$$

$$\text{இங்கு} \quad A = \frac{36}{180}, \quad B = \frac{29}{180}, \quad H = \frac{12}{180}.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{36}{180} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{29}{180} - \frac{1}{r^2}\right) = \left(\frac{12}{180}\right)^2$$

$$\text{(அ-து)} \quad (36r^2 - 180)(29r^2 - 180) = 144r^4$$

$$\therefore \quad 1044r^4 - 11700r^2 + 32400 = 144r^4$$

$$\text{(அ-து)} \quad 900r^4 - 11700r^2 + 32400 = 0$$

$$\therefore \quad r^4 - 13r^2 + 36 = 0$$

$$\text{எனவே,} \quad (r^2 - 9)(r^2 - 4) = 0$$

$$\therefore \quad r_1^2 = 9; \quad r_2^2 = 4$$

பேரச்சின் நீளம் $2r_1 = 2\sqrt{9} = 6.$

சிற்றச்சின் நீளம் $2r_2 = 2\sqrt{4} = 4.$

பேரச்சின் சமன்பாடு,

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + Hy = 0.$$

$$\text{(அ-து)} \quad \left(\frac{36}{180} - \frac{1}{9}\right)x + \frac{12}{180}y = 0.$$

$$\therefore \quad 16x + 12y = 0.$$

பழைய ஆயங்களைச் சார்ந்து பேரச்சின் சமன்பாடு

$$16(x-2)+12(y+3)=0.$$

$$16x+12y+4=0$$

(அ-து, $4x+3y+1=0.$

சிற்றச்சின் சமன்பாடு $3x-4y+K=0$ ஆகும்.

இது $(2,-3)$ வழிச் செல்லின்,

$$6+12+K=0.$$

$$\therefore \quad K=-18.$$

எனவே, பழைய ஆயங்களைச் சார்ந்து சிற்றச்சின் சமன்பாடு

$$3x-4y-18=0.$$

சமன்பாடு (1)-இல் $y=0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$36x^2-72x+81=0$$

$$4x^2-8x+9=0.$$

$$\therefore \quad x=\frac{8\pm\sqrt{64-144}}{8}.$$

எனவே, நீள் வட்டம் x ஆயத்தைக் கற்பனைப் புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (1)-இல் $x=0$ எனப்பிரதியிடின்,

$$28y^2+126y+81=0.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} y=-\cdot 8 \\ y=-3\cdot 6 \end{array}\right\} \text{(தோராயமாக)}$$

எனவே, நீள் வட்டம் y ஆயத்தை $Q(0,-\cdot 8)$. $Q'(0,-3\cdot 6)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

நீள் வட்டத்தின் செவ்வகலம்

$$2\,\frac{r_2^2}{r_1}=2.\frac{4}{3}=\frac{8}{3}.$$

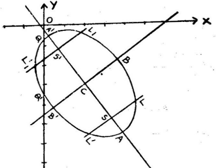
நீள் வட்டம் வரைய முதலில் பேரச்சையும், சிற்றச்சையும் வரைக. அவைகள் வெட்டும் புள்ளி நீள் வட்டத்தின் மையமாகும். மையம் C-யிலிருந்து பேரச்சின் மீது A, A' புள்ளிகளை $CA=CA'=3$

என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும. இவைகள் பேரச்சின் முனைகளாகும். பின் சிற்றச்சில் B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = 2$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

பின், B புள்ளியை மையமாகவும், CA-வை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரையவும். இது பேரச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் S, S' எனும் குவியங்களாகும். S புள்ளி வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாக ஒரு கோடு வரைந்து அதன் மீது $SL = SL' = \frac{4}{3}$ என்றிருக்குமாறு L, L' புள்ளிகளைக் குறிக்கவும். இவ்வாறே S' வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடு வரைந்து $S'L_1 = S'L_1' = \frac{4}{3}$ என்றிருக்குமாறு L_1, L_1' புள்ளிகளை குறிக்கவும்.

நீள் வட்டம் x ஆயத்தை வெட்டாது. அது y ஆயத்தை $Q(0, -\cdot 8)$, $Q'(0, -3\cdot 6)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

A, A'; B, B'; L, L'; L_1, L_1'; Q, Q' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு நீள் வட்டமாகும். அதன் அமைப்புத் தோராயமாகப் பின் வருமாறு இருக்கும்.



படம் 91. நீள் வட்டம்

$c(2, -3)$, $SL = \frac{4}{3}$, $SL_1 = \frac{4}{3}$, $Q(0, -\cdot 8)$, $Q'(0, 3\cdot 6)$.

மாதிரி 8 :

$$3(3x-2y+4)^2 + 2(2x+3y-5)^2 = 39$$

என்ற கூம்பு வளைவின் படம் வரைக.

$$3(3x-2y+4)^2+2(2x+3y-5)^2=39 \quad \ldots (1)$$

$$3x-2y+4=0,\ 2x+3y-5=0$$

என்ற கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டுமாதலின், சமன்பாடு (1)-ஐப் பின் வருமாறு எழுதலாம்.

$$3\left[\frac{3x-2y+4}{\sqrt{3^2+2^2}}\right]^2(\sqrt{3^2+2^2})^2$$

$$+\ 2\left[\frac{2x+3y-5}{\sqrt{2^2+3^2}}\right]^2(\sqrt{2^2+3^2})^2=39$$

(அ-து) $$3\left(\frac{3x-2y+4}{\sqrt{13}}\right)^2+2\left(\frac{2x+3y-5}{\sqrt{13}}\right)^2=3 \quad \ldots \ldots (2)$$

$P(x, y)$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனவும், அப் புள்ளியிலிருந்து $3x-2y+4=0$, $2x+3y-5=0$ கோடுகளுக்கு வரையப்படும் செங்குத்துக் கோடுகள் முறையே PM, PN எனவும் கொள்வோம்.

எனவே, சமன்பாடு (2)

$$3PM^2 + 2PN^2 = 3 \text{ என்றாகும்.}$$

(அ-து) $$\frac{PM^2}{1} + \frac{PN^2}{\frac{3}{2}} = 1$$

(அ-து) $$\frac{PN^2}{\frac{3}{2}} + \frac{PM^2}{1} = 1$$

(அ-து) $\frac{X^2}{A^2} + \frac{Y^2}{B^2} = 1$

என்ற வடிவிலுள்ளதால் சமன்பாடு (1) ஒரு நீள் வட்டத்தைக் குறிக்கும்.

பேரச்சின் சமன்பாடு $Y = 0$

(அ-து) $3x - 2y + 4 = 0.$

சிற்றச்சின் சமன்பாடு $X = 0$

(அ-து) $2x + 3y - 5 = 0.$

பேரச்சின் நீளம்

$$= 2A = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}.$$

சிற்றச்சின் நீளம்

$$= 2B = 2\sqrt{1} = 2.$$

நீள் வட்ட மையம்

$$\begin{pmatrix} 3x - 2y + 4 = 0 \\ 2x + 3y - 5 = 0 \end{pmatrix} \text{(அ-து)} \left(-\frac{2}{13}, \frac{23}{13}\right).$$

நீள் வட்டத்தின் செவ்வகலம்

$$= 2\frac{B^2}{A} = 2.\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

சமன்பாடு (1)-இல் $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$3(3x + 4)^2 + 2(2x - 5)^2 = 39$ என்றுகும்.

$3(9x^2 + 24x + 16) + 2(4x^2 - 20x + 25) = 39$

(அ-து) $35x^2 + 32x + 59 = 0.$

$$\therefore \quad x = \frac{-32 \pm \sqrt{1024 - 8260}}{70}.$$

எனவே, நீள் வட்டம் x ஆயத்தை மெய்யான புள்ளிகளில் வெட்டாது.

மீண்டும் சமன்பாடு (1)-இல் $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$3(-2y+4)^2 + 2(3y-5)^2 = 39$$

(அ - து) $(12y^2 - 48y + 48) + 2(9y^2 - 30y + 25) = 39$

(அ - து) $30y^2 - 108y + 59 = 0.$

$$\therefore \quad y = \frac{108 \pm \sqrt{11664 - 7080}}{60}.$$

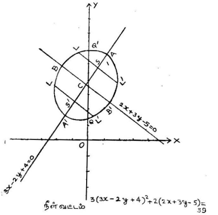
$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} y = 2{\cdot}90 \\ y = \ \ {\cdot}70 \end{array}\right\} \text{ தோராயமாக.}$$

எனவே, நீள் வட்டம் y ஆயத்தை $Q(0, \cdot 7)$, $Q'(0, 2{\cdot}9)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

நீள் வட்டம் வரைய முதலில் $3x - 2y + 4 = 0$, என்ற பேரச்சையும், $2x + 3y - 5 = 0$ என்ற சிற்றச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி நீள் வட்ட மையம் $C\left(-\frac{2}{13}, \frac{23}{13}\right)$ ஆகும். பின் பேரச்சின்மீது A, A' புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{3}{2}}$ என்றிருக்குமாறும், சிற்றச்சின்மீது B, B' புள்ளிகளை $CB = CB' = 1$ என்றிருக்குமாறும் குறிக்கவும். பின் B புள்ளியை மையமாகவும், CA-வை ஆரமாகவும் கொண்ட ஒரு வட்டம் வரைக. இவ்வட்டம் பேரச்சை வெட்டும் புள்ளிகள் S, S' எனும் குவியங்கள் ஆகும்.

S, S' புள்ளிகள் வழி பேரச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்து L, L'; L_1, L_1' என்ற புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L = S'L' = \sqrt{\frac{2}{3}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

A, A'; B, B'; Q, Q'; L, L'; L_1, L_1' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு நீள் வட்டமாகும். படத்தின் அமைப்புத் தோராயமாகப் பின்வருமாறு இருக்கும்.



படம் 92.

$C\left(-\frac{2}{13}, \frac{23}{13}\right)$. $Q(0, \cdot7)$, $Q'(0, 2\cdot9)$

$$SL = SL' = S'L = S'L' = \sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\cdot 67} = \cdot 8$$

(தோராயமாக).

மாதிரி 9: $3x^2 + 4xy - 6 = 0$ என்ற கூம்பு வளைவின் படம் வரைக. அதன் தொலைத் தொடுகோடுகளைக் காண்க.

$$3x^2 + 4xy - 6 = 0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$a = 3$, $h = 2$, $b = 0$, $g = f = 0$, $c = -6$.

$ab - h^2 = 0 - 4 = -4 < 0$.

எனவே, (1) ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = 3x^2 + 4xy - 6.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x.$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ எனின்,

$$6x + 4y = 0$$

$$4x = 0$$

எனவே, அதிபரவளைவின் மையம் (0, 0).

ஆதியும் மையமும் ஒன்றுதலால், மையக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$3x^2 + 4xy - 6 = 0$$

(அ-து) $\frac{3}{6}x^2 + \frac{4}{6}xy = 1.$

அச்சுக்களின் நீளம்

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)\left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2.$$

இங்கு $A = \frac{3}{6}$, $H = \frac{2}{6}$, $B = 0$ ஆதலின்,

$$\left(\frac{3}{6} - \frac{1}{r^2}\right)\left(-\frac{1}{r^2}\right) = \frac{4}{36}.$$

(அ-து) $2r^4 + 9r^2 - 18 = 0$

(அ-து) $(2r^2 - 3)(r^2 + 6) = 0.$

எனவே, $r_1^{\,2} = \frac{3}{2}$, $r_2^{\,2} = -6.$

$\therefore$ குறுக்கச்சின் நீளம் $= 2\sqrt{r_1^2} = 2\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{6}$.

துணையச்சின் நீளம் $= 2\sqrt{|r_2^2|} = 2\sqrt{|-6|} = 2\sqrt{6}$ (எண் மதிப்பு).

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r_1^2}\right)x + Hy = 0$$

(அ-து) $\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{3}\right)x + \frac{2}{6}y = 0$

(அ-து) $x - 2y = 0$.

துணையச்சின் சமன்பாடு

$$2x + y = K.$$

இஃது ஆதி வழிச் செல்வதால், $K = 0$.

$\therefore$ $2x + y = 0$.

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$3x^2 = 6$ (அ-து) $x = \pm\sqrt{2}$.

எனவே, அதிபரவளைவு x ஆயத்தை $P(\sqrt{2}, 0)$, $P'(-\sqrt{2}, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது.

சமன்பாடு (2)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$y = \frac{6 - 3x^2}{4x} = \frac{6}{0} = \infty.$$

எனவே, அதிபரவளைவு y ஆயத்தைக் கந்தழியில் வெட்டும்.

$$e^2 = \frac{r_1^2 + |r_2^2|}{r_1^2} = \frac{\frac{3}{2} + 6}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{15}{2} \times \frac{2}{3} = 5.$$

$\therefore \quad e = \sqrt{5}.$

$$CS = CS' = r_1 e = \sqrt{\frac{3}{2}}\sqrt{5} = \sqrt{\frac{15}{2}}.$$

அதிபரவளைவின் செவ்வகலம்

$$= 2\,\frac{|r_2{}^2|}{r_1} = 2\frac{6}{\sqrt{\frac{3}{2}}} = 4\sqrt{6}.$$

அதிபர வளைவுப் படம் வரைய முதலில் குறுக்கச்சையும், துணையச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி அதிபர வளைவின் மையம் $C(0, 0)$ ஆகும்.

குறுக்கச்சின்மீது A, A' புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{6}{2}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். மேலும், குறுக்கச்சின்மீது S, S' புள்ளிகளை $CS = CS' = \sqrt{\frac{15}{2}}$ என்ற அளவில் குறிக்கவும்.

பின் S, S' புள்ளிகள் வழி குறுக்கச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்து அவைகளின்மீது L, L'; L_1, L_1' புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L_1 = S'L_1' = 2\sqrt{6}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும்.

A, A'; P, P'; L, L'; L_1, L_1' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு அதிபரவளைவாகும். அதிபரவளைவின் படம் தோராயமாகப் பின் வருமாறு அமையும்.

தொலைத் தொடு கோடுகளின் சமன்பாடு

$$3x^2 + 4xy + K = 0.$$

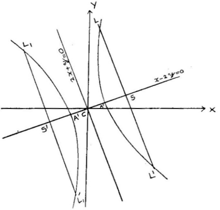
இவைகள் ஆதிவழிச் செல்வதால், $K = 0$.

எனவே, தொலைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$3x^2 + 4xy = 0$$

(அ - து) $x(3x + 4y) = 0$

(அ - து) $x = 0,\ 3x + 4y = 0.$



படம் 98.

மாதிரி 10 : $x^2-5xy+y^2+8x-20y+15=0$ என்ற கூம்பு வளைவின் படம் வரைக.

$$x^2-5xy+y^2+8x-20y+15=0 \quad \ldots \quad (1)$$

$$a=1,\ h=-\frac{5}{2},\ b=1,$$

$$g=4,\ f=-10,\ c=15.$$

$$ab-h^2=1-\frac{25}{4}$$

$$=-\frac{21}{4}<0.$$

எனவே, சமன்பாடு (1) ஓர் அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$$f(x, y) = x^2 - 5xy + y^2 + 8x - 20y + 15.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 5y + 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 5x - 20$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ எனின்,

$$2x - 5y + 8 = 0,$$
$$-5x + 2y - 20 = 0.$$

இவைகளின் தீர்வுகள் அதிபரவளைவின் மையம் ஆகும்.

எனவே, அதிபரவளைவின் மையம் $(-4, 0)$.

ஆதியை மையத்திற்கு மாற்றினால் மையக் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$x^2 - 5xy + y^2 + c_1 = 0.$$

$$c_1 = gx_1 + fy_1 + c$$
$$= 4(-4) + 0 + 15 = -1$$

$$\therefore\ x^2 - 5xy + y^2 = 1.$$

அச்சுக்களின் நீளங்கள் பின் வரும் சமன்பாடுகளிலிருந்து அறியலாம்.

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)\left(B - \frac{1}{r^2}\right) = H^2.$$

இங்கு $A = 1,\ B = 1,\ H = -\frac{5}{2}$ ஆதலின்,

$$\left(1 - \frac{1}{r^2}\right)\left(1 - \frac{1}{r^2}\right) = \frac{25}{4}.$$

$$\therefore\ (r^2 - 1)^2 = \frac{25}{4} r^4$$

(அ-து) $21r^4 + 8r^2 - 4 = 0.$

$$\therefore \quad r^2 = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 336}}{42}$$

$$= \frac{-8 \pm 20}{42}.$$

$$\therefore \; r_1{}^2 = \frac{2}{7}, \; r_2{}^2 = -\frac{2}{3}.$$

எனவே, குறுக்கச்சின் நீளம்

$$2r_1 = 2\sqrt{\frac{2}{7}}.$$

துணையச்சின் நீளம்

$$2\sqrt{|r_2{}^2|} = 2\sqrt{\left|-\frac{2}{3}\right|} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$\left(A - \frac{1}{r^2}\right)x + Hy = 0$$

(அ - து) $\left(1 - \frac{7}{2}\right)x - \frac{5}{2}y = 0$

(அ - து) $x + y = 0.$

எனவே, பழைய ஆயங்களைப் பொறுத்துக் குறுக்கச்சின் சமன்பாடு

$$(x + 4) + y = 0$$

(அ - து) $x + y + 4 = 0.$

துணையச்சின் சமன்பாடு

$$y - x + K = 0$$

இது $(-4, 0)$ புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$4 + K = 0. \qquad \therefore \; K = -4.$$

எனவே, பழைய ஆயங்களைச் சார்ந்து துணையச்சின் சமன்பாடு

$$y - x - 4 = 0$$

(அ - து) $x - y + 4 = 0$.

சமன்பாடு (1)-இல், $y = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$x^2 + 8x + 15 = 0$$

(அ - து) $(x + 3)(x + 5) = 0$.

எனவே, அதிபரவளைவு x ஆயத்தை $P(-3, 0)$, $P'(-5, 0)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

சமன்பாடு (1)-இல், $x = 0$ எனப் பிரதியிடின்,

$$y^2 - 20y + 15 = 0.$$

$$\therefore \quad \left.\begin{array}{l} y = 19{\cdot}2 \\ y = \;\;\;{\cdot}8 \end{array}\right\} \text{(தோராயமாக).}$$

எனவே, அதிபரவளைவு y ஆயத்தை $Q(0, {\cdot}8)$, $Q'(0, 19{\cdot}2)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

$$e^2 = \frac{r_1^{\,2} + |r_2^{\,2}|}{r_1^{\,2}} = \frac{\frac{2}{7} + \frac{2}{3}}{\frac{2}{7}}$$

$$= \frac{20}{21} \times \frac{7}{2} = \frac{10}{3}$$

$$\therefore \quad e = \sqrt{\frac{10}{3}}.$$

S, S' குவியங்கள் எனவும், C அதிபரவளைவின் மையமெனவும் கொண்டால்,

$$CS = CS' = r_1 e$$

$$= \sqrt{\frac{2}{7}}\sqrt{\frac{10}{3}} = \sqrt{\frac{20}{21}} = 2\sqrt{\frac{5}{21}}.$$

$$\text{செவ்வகலம்} = 2\,\frac{|r_2^{\,2}|}{r_1} = \frac{2 \cdot \frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{2}{7}}}$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{\frac{7}{2}} = 2\sqrt{\frac{14}{9}} = 2\frac{\sqrt{14}}{3}.$$

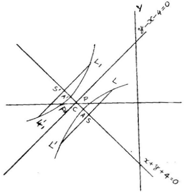
அதிபரவளைவின் படம் வரைய முதலில் குறுக்கச்சையும், துணையச்சையும் வரையவும். இவைகள் வெட்டும் புள்ளி அதிபரவளைவின் மையம் C ஆகும்.

குறுக்கச்சின்மீது A, A'; S, S' புள்ளிகளை $CA = CA' = \sqrt{\frac{2}{7}}$, $CS = CS' = 2\sqrt{\frac{5}{21}}$ என்றிருக்குமாறு குறிக்கவும். S, S' புள்ளிகள் வழி குறுக்கச்சுக்குச் செங்குத்தாகக் கோடுகள் வரைந்து, அவைகளின்மீது L, L'; L_1, L_1' என்ற புள்ளிகளை $SL = SL' = S'L_1 = S'L_1' = \frac{1}{3}\sqrt{14}$ என்ற அளவில் குறிக்கவும்.

அதிபரவளைவு x ஆயத்தை P, P' புள்ளிகளிலும், y ஆயத்தை Q, Q' புள்ளிகளிலும் வெட்டுகிறது.

A, A'; P, P'; Q, Q'; L, L'; L_1, L_1' புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் வளைவு அதிபரவளைவாகும்.

அதிபரவளைவின் படம் கீழ்க் கண்டவாறு தோராயமாக இருக்கும்.



படம் 94.

பயிற்சி 9.1.

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் தன்மைகள் காண்க.

1. $2x^2 - 5xy - 3y^2 - x - 4y + 6 = 0.$
2. $13x^2 - 18xy + 37y^2 + 2x + 14y - 2 = 0.$
3. $y^2 - 2\sqrt{3}xy + 3x^2 + 6x - 4y + 5 = 0.$
4. $7x^2 - 17xy + 6y^2 + 23x - 2y - 20 = 0.$
5. $36x^2 + 24xy + 29y^2 - 72x + 126y + 81 = 0.$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் தொலைத் தொடுகோடுகள் காண்க.

6. $x^2 - xy - 2y^2 + 3y - 2 = 0$
7. $y^2 - xy - 2x^2 - 5y + x - 6 = 0.$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் அச்சுக்களின் நீளம் காண்க.

8. $5x^2 + 6xy + 5y^2 + 12x + 4y - 4 = 0.$
9. $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 50 = 0.$
10. $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0.$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளின் அச்சுகள் தம் சமன்பாடுகள் காண்க.

11. $x^2 + 4xy - 6y^2 - 28x + 36y + 16 = 0.$
12. $11x^2 + 4xy + 14y^2 - 26x - 32y + 23 = 0.$
13. $(x-2y+1)^2 + (4x + 2y - 3)^2 = 10.$
14. $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 33 = 0.$
15. $6x^2 + 4xy + 6y^2 - 20x + 4y + 14 = 0.$

கீழ்க் காணும் கூம்பு வளைவுகளை வரைக.

16. $4(x-3)^2 + 5(y-2)^2 = 0.$
17. $3(x-4)^2 - 4(y-5)^2 = 36.$
18. $25x^2 - 120xy + 144y^2 - 476x - 1494y - 1414 = 0.$

19. $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$

20. $x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 1 = 0$.

21. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 18x - 101y + 19 = 0$.

22. $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 104x - 172y + 44 = 0$.

23. $x^2 + 12xy - 4y^2 - 6x + 6y + 9 = 0$.

24. $x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 2y - 6 = 0$.

25. $14x^2 - 4xy + 11y^2 - 44x - 58y + 71 = 0$.

26. $ax^2 + 2hxy = by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ஒரு செவ்வக அதிபரவளை வெனின், தொலைத் தொடு கோடுகளைச் சார்ந்து அதன் சமன்பாடு, $2(h^2-ab)^{\frac{3}{2}} xy - \triangle = 0$ என நிறுவுக.

27. $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (bx+ay-ab)^2$ என்ற பரவளையின் செவ்வகல நீளம் $\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ என நிறுவுக.

28. $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{a}$ என்ற பரவளையின் குவியம், அச்சு, இயக்குவரை ஆகியவற்றைக் காண்க.

29. $ax^2 + 2hxy + ay^2 = d$ என்ற கூம்பு வளைவின் வரை அச்சுக்களின் (semi axes) நீளங்களின் பெருக்குத் தொகை $\dfrac{d}{\sqrt{a^2-h^2}}$ என நிறுவுக.

30. $x^2+y^2=(3x+4y+10)^2$ என்ற சமன்பாட்டை விளக்குக.

விடைகள்

1. அதிபரவளைவு, மையம் $\left(-\dfrac{2}{7}, -\dfrac{3}{7}\right)$, $2x^2 - 5xy - 3y^2 + 7 = 0$.

2. நீள் வட்டம், மையம் $\left(-\dfrac{1}{4}, -\dfrac{1}{4}\right)$, $13x^2 - 18xy + 37y^2 = 4$.

3. கூம்பு வளைவு ஒரு பரவளை வாகும்.

4. அதிபரவளைவு, மையம் (2,3), $7x^2 - 17xy + 6y^2 = 0$.

5. நீள் வட்டம், மையம் (2, −3), $36x^2 + 24xy + 29y^2 = 180$.

6. $x^2 - xy - 2y^2 + 3y - 1 = 0$.

7. $(y+x-2)(y-2x-3) = 0$.

8. $\sqrt{6}$; $\frac{1}{2}\sqrt{6}$.

9. $2\sqrt{60}$; $2\sqrt{-12}$.

10. $2\sqrt{6}$; 4.

11. $4x + 3y + 11 = 0$, $3x - 4y + 2 = 0$.

12. $x + 2y - 3 = 0$. $2x - y - 1 = 0$.

13. $4x + 2y - 3 = 0$. $x - 2y + 1 = 0$

14. $2x + y - 3 = 0$, $x - 2y + 1 = 0$.

15. $x - y - 3 = 0$. $x + y - 1 = 0$.

16. நீள் வட்டம், மையம் (3, 2), பேரச்சு $y - 2 = 0$, சிற்றச்சு $x - 3 = 0$, பேரச்சின் நீளம் $2\sqrt{5}$, சிற்றச்சின் நீளம் 4.

17. அதிபரவளைவு, (4, 5), குறுக்கச்சு $4\sqrt{5}$, துணையச்சு $x - 4 = 0$, குறுக்கச்சு $y - 5 = 0$.

18. பரவளைவு முனை (−2, 3), அச்சு $5x - 12y + 46 = 0$. செவ்வகலம் 6, முனையிடத்துத் தொடுகோடு $12x + 5y + 9 = 0$.

19. $x^2 - 3xy + y^2 + 10x - 10y + 21 = 0$. அதிபரவளைவு, மையம் (−2, 2). குறுக்கச்சு $2\sqrt{2}$, துணையச்சு $2\sqrt{\frac{2}{5}}$.

20. பரவளைவு, முனை $\left(-\frac{3}{8}, \frac{7}{8}\right)$, அச்சு $2x + 2y - 1 = 0$. முனையிடத்துத் தொடுகோடு $4x - 4y + 5 = 0$, செவ்வகல நீளம் $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

21. பரவளைவு, முனை $\left(-\frac{29}{25}, \frac{29}{25}\right)$, செவ்வகல நீளம் 3, அச்சு $3x-4y+7=0$, முனையிடத்துத் தொடுகோடு $4x+3y+2=0$.

22. பரவளைவு, முனை $\left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right)$, செவ்வகல நீளம் 8, அச்சு $4x-3y+2=0$, முனையிடத்துத் தொடுகோடு $3x+4y-1=0$.

23. அதிபரவளைவு, மையம் $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, குறுக்கச்சு $3x+2y-1=0$, துணையச்சு $4x-6y+3=0$, குறுக்கச்சின் நீளம் $2\sqrt{\frac{10}{8}}$, துணையச்சின் நீளம் $2\sqrt{\frac{-10}{5}}$.

24. அதிபரவளைவு, மையம் $(-1, 1)$, குறுக்கச்சு $\frac{4}{\sqrt{3}}$, துணையச்சு $2\sqrt{-4}$, குறுக்கச்சு $x-y+2=0$, துணையச்சு $x+y=0$.

25. நீள் வட்டம், மையம் $(+2, +3)$, பேரச்சு $2x-y-1=0$, $2\sqrt{6}$; சிற்றச்சு $x+2y-8=0$, **4.**

28. குவியம் $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$, அச்சு $x-y=0$, இயக்கு வரை $x+y=0$.

30. பரவளைவு $\left(\frac{23}{16}, -\frac{3}{16}\right)$, அச்சு $4x+4y=5$, செவ்வகலம் $\frac{3\sqrt{2}}{4}$, முனையிடத்துத் தொடுகோடு $8x-8y=13$.

9·10. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ என்ற கூம்பு வளைவுக்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் ஒரு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இக் கோட்டின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள்

$$(x_1 + r\cos\theta,\ y_1 + r\sin\theta) \text{ ஆகும்.}$$

இப் புள்ளி $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad (2)$

என்ற கூம்பு வளைவின் மீதிருப்பின்,

$$a(x_1+r\cos\theta)^2+2h(x_1+r\cos\theta)(y_1+r\sin\theta)+b(y_1+r\sin\theta)^2 + 2g(x_1+r\cos\theta)+2f(y_1+r\sin\theta)+c=0.$$

(அ-து) $r^2[a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta]$
$+ 2r[(ax_1+hy_1+g)\cos\theta+(hx_1+by_1+f)\sin\theta]$
$+ ax^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \ldots (3)$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின், இதன் இரு மதிப்புக்களாக r_1, r_2 என்பவை, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வளைவுகள் (1), (2) வெட்டும் இரு புள்ளிகளின் தூரங்களை அளிக்கும்.

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு (1), (x_1y_1) புள்ளியிடத்துக் கூம்பு வளைவு (2)-இன் தொடுகோடெனின் $r_1 = r_2 = 0$.

(அ-து) சமன்பாடு (3)-இன் இரு தீர்வுகளும் பூச்சியமாம்.

$$\therefore\ ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c=0 \quad \ldots \quad (4)$$

$$(ax_1+hy_1+g)\cos\theta+(hx_1+by_1+f)\sin\theta=0 \quad \ldots (5)$$

(5)-இலிருந்து $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}$.

ஆனால், (1)-இலிருந்து $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y-y_1}{x-x_1}$.

$$\therefore\ \frac{y-y_1}{x-x_1} = -\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}.$$

(அ-து) $(ax_1+hy_1+g)(x-x_1)+(hx_1+by_1+f)(y-y_1)=0.$

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g+fy$$
$$= ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1.$$

இரு பக்கமும் gx_1+fy_1+c-ஐக் கூட்ட,

$$\begin{aligned} axx_1 + h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c \\ = ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c \\ = 0 \text{ (சமன்பாடு 4-இன் படி).} \end{aligned}$$

எனவே, $(x_1 \ y_1)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1) +f(y+y_1)+c = 0.$$

(அ-து) $$x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f) +(gx_1+fy_1+c) = 0.$$

9·11. $lx+my+n=0$ எனும் கோடு $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ கூம்பு வளைவுக்குத் தொடுகோடாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$$lx+my+n = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad (2)$$

கோடு (1), கூம்புவளைவு (2)-க்கு (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடெனக் கொள்வோம்.

பத்தி 9·10-இன்படி (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y+y_1) + c = 0.$$

(அ - து) $$x(ax_1 + hy_1 + g) + y(hx_1 + by_1 + f) + (gx_1 + fy_1 + c) = 0 \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (3) ஒரே நேர்க் கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad \frac{ax_1+hy_1+g}{l} = \frac{hx_1+by_1+f}{m} = \frac{gx_1+fy_1+c}{n} = \lambda.$$

(அ-து) $ax_1 + hy_1 + g = l\lambda$ ... ... (4)

$hx_1 + by_1 + f = m\lambda$ ... ... (5)

$gx_1 + fy_1 + c = n\lambda$ ... ... (6)

(x_1, y_1) புள்ளி $lx + my + n = 0$ கோட்டின் மீதுள்ளது.

$\therefore \quad lx_1 + my_1 + n = 0$ ... ... (7)

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6), (7)-இல் x_1, y_1, λ-ஐ நீக்கினல்,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l \\ h & b & f & m \\ g & f & c & n \\ l & m & n & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்றுகும்.}$$

இதை விரிவு படுத்தினல்,

$Al^2 + Bm^2 + Cn^2 + 2Fmn + Gnl + 2Hlm = 0$ என்றுகும்.
இங்கு A, B, C, F, G, H என்பவை

$$\begin{vmatrix} a & h & g \\ h & b & f \\ g & f & c \end{vmatrix}$$

என்ற அணிக் கோவையின் (determinant) a, b, c, f, g, h என்ற மூலங்களின் (elements) இணைச்சிறை யாகும் (cofactors).

9·12. கூம்பு வளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக் கோட்டின் சமன்பாடு

நாம் முன்னர்க் கண்டது போல, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ கூம்பு வளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக் கோடு அல்லது (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண், (x_1, y_1) புள்ளியிடத்துக் கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் தொடுகோட்டின் சமன்பாட்டின் வடிவிலிருக்கும்.

(அ-து) (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

9·13. $P(x_1, y_1)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு $Q(x_2, y_2)$ புள்ளிவழிச் செல்லின், Q புள்ளியின் இசைக்கோடு P புள்ளிவழிச் செல்லும்.

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவைச் சார்ந்த (x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0.$$

இது $Q(x_2, y_2)$ வழிச் செல்லின்,

$$ax_1x_2+h(x_2y_1+x_1y_2)+by_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c=0 \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

கூம்பு வளைவு (1)-ஐச் சார்ந்த $Q(x_2y_2)$ புள்ளியின் இசைக்கோட்டின் சமன்பாடு

$$axx_2+h(xy_2+x_2y)+byy_2+g(x+x_2)+f(y+y_2)+c=0.$$

இது சமன்பாடு (2)-இன்படி $P(x_1y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

இவ்விரு புள்ளிகளும் கூம்புவளைவினைச் சார்ந்த துணையியப் புள்ளிகள் எனப்படும்.

9·14. $l_1x+m_1y+n_1=0$, $l_2x+m_2y+n_2=0$ துணையியக்கோடுகளாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவு ( )-ஐச் சார்ந்த $l_1x+m_1y+n_1=0 \quad \dots \quad (2)$

கோட்டின் இசைப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக்கோள்வோம்.

(x_1, y_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)+(gx_1+fy_1+c)=0 \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (1), (8) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

எனவே, பத்தி 9·11-இன்படி,

$$ax_1+hy_1+g-\lambda l_1 = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

$$hx_1+by_1+f-\lambda m_1=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

$$gx_1+fy_1+c-\lambda n_1=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

$l_1x+m_1y+n_1=0$, $l_2x+m_2yn+_2=0$ துணையியக் கோடுகள் எனின், (x_1, y_1) புள்ளி $l_2x+m_2y+n_2=0$ கோட்டின் மீதமையும்.

$$\therefore \quad l_2x_1+m_2y_1+n_2=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (7)$$

சமன்பாடுகள் (4), (5), (6), (7)-இல் x_1, y_1, λ-ஐ நீக்கின்,

$$\begin{vmatrix} a & h & g & l_1 \\ h & b & f & m_1 \\ g & f & c & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ என்றுகும்.}$$

இதைச் சுருக்கின்,

$$Al_1l_2+Bm_1m_2+Cn_1n_2+F(m_1n_2+m_2n_1)$$
$$+\,G(n_1l_2+n_2l_1)+H(l_1m_2+l_2m_1)=0.$$

9·15. (x_1, y_1)-ஐ நடுப்புள்ளியாகக் கொண்ட நாணின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவின் நாணின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

எனின், அதன் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியின் ஆயத்தொலைகள் $(x_1+r\cos\theta,\ y_1+r\sin\theta)$ ஆகும்.

கோடு (2), கூம்பு வளைவு (1)-ஐ வெட்டும் புள்ளிகளைக் காணும் சமன்பாடு (1)-இல் $x = x_1 + r\cos\theta$, $y = y_1 + r\sin\theta$ எனப் பிரதியிடின்,

$$a(x_1 + r\cos\theta)^2 + 2h(x_1 + r\cos\theta)(y_1 + r\sin\theta) + b(y_1 + r\sin\theta)^2 + 2g(x_1 + r\cos\theta) + 2f(y_1 + r\sin\theta) + c = 0$$

(அ - து) $r^2(a\cos^2\theta + 2h\sin\theta\cos\theta + b\sin^2\theta) + 2r[(ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta] + x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடாதலின் இதற்கு இரு தீர்வுகள் உண்டு. அவை r_1, r_2 எனின்,

$$r_1 + r_2 = 0 \text{ ஆகும்.}$$

$$\therefore\ (ax_1 + hy_1 + g)\cos\theta + (hx_1 + by_1 + f)\sin\theta = 0. \qquad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடு (2)-இலிருந்து

$$\cos\theta = \frac{x - x_1}{r},\ \sin\theta = \frac{y - y_1}{r}.$$

$$\therefore\ (ax_1 + hy_1 + g)\frac{x - x_1}{r} + (hx_1 + by_1 + f)\frac{y - y_1}{r} = 0$$

(அ - து) $(x - x_1)(ax_1 + hy_1 + g) + (y - y_1)(hx_1 + by_1 + f) = 0.$

$$\therefore\ axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + gx + fy = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + gx_1 + fy_1).$$

இரு பக்கமும் $gx_1 + fy_1 + c$-ஐக் கூட்ட,

$$axx_1 + h(xy_1 + x_1y) + byy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c$$

(அ - து) $T = S_1$.

9·16. இணை நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad (1)$$

கூம்பு வளைவு நாண்களின் ஒன்றின் நடுப்புள்ளி (x_1, y_1) எனக் கொள்வோம்.

எனவே, அந்நாணின் சமன்பாடு

$$T = S_1$$

(அ-து) $axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c$
$= ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c$

(அ-து) $x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)+(gx_1+fy_1+c)$
$= ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c.$

இதன் சரிவு $= -\dfrac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}$

இணையான நாண்களின் சரிவுகள் சமம். அது மாறிலி m எனக் கொண்டால்,

$$m = -\frac{ax_1+hy_1+g}{hx_1+by_1+f}.$$

$$\therefore \quad (ax_1+hy_1+g)+m(hx_1+by_1+f)=0.$$

(அ-து) $x_1(a+mh)+y_1(h+mb)+(g+mf)=0.$

$\therefore$ நடுப்புள்ளி (x_1, y_1)-இன் இயங்கு வழி

$$x(a+mh)+y(h+mb)+(g+mf)=0.$$

இணை நாண்கள் தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்கு வழி கூம்பு வளைவின் விட்டம் எனப்படும்.

9·17. இரு விட்டங்களில் ஒன்று மற்றதன் இணை நாண்களைச் சமமாகப் பிரிக்குமெனின், அவைகள் துணையிய விட்டங்கள் எனப்படும்.

$$y = m_1x \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற விட்டத்திற்கு இணையாக உள்ள பிறிதொரு விட்டத்தின் சமன்பாடு

$$y = m_2 x \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

எனக் கொள்வோம்.

பத்தி 9·16-இன்படி அவ்விடத்தின் சமன்பாடு

$$(a+m_1h)x+(h+m_1b)y+(g+m_1f) = 0 \qquad \ldots \qquad (3)$$

எனவே, $m_2 = -\dfrac{a+m_1h}{h+m_1b}$

(அ-து) $hm_2+m_1m_2b+a+m_1h=0$

(அ-து) $a+(m_1+m_2)h+m_1m_2b=0$

எனவே, $y=m_1x$, $y=m_2x$ துணையிய விட்டங்களெனின்,

$$a+(m_1+m_2)h+bm_1m_2=0.$$

9·18. $ax^2+2hxy+by^2=1$ கூம்பு வளைவுக்கு $Ax^2+2Hxy+By^2=0$ குறிக்கும் இரு கோடுகள் துணையியக் கோடுகளாவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு

$Ax^2+2Hxy+By^2=0$ குறிக்கும் இருகோடுகளின் தனித்தனிச் சமன்பாடு

$y=m_1x$, $y=m_2x$ எனின்,

$$m_1+m_2 = -\frac{2H}{B}, \quad m_1m_2 = \frac{A}{B}.$$

$y=m_1x$, $y=m_2x$ துணையிய விட்டங்கள் எனின்,

$$a+(m_1+m_2)h+bm_1m_2=0.$$

$$\therefore \quad a+\left(\frac{-2H}{B}\right)h+b\left(\frac{A}{B}\right)=0$$

(அ-து) $aB-2Hh+bA=0$

(அ-து) $aB+bA=2Hh.$

9·19. (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

(x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லும் கோடு

$$\frac{x-x_1}{\cos\theta} = \frac{y-y_1}{\sin\theta} = r \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

இது $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \ldots \qquad (2)$

எனும் கூம்பு வளைவை வெட்டுமிடங்களில்,

$$a(x_1+r\cos\theta)^2 + 2h(x_1+r\cos\theta)(y_1+r\sin\theta) + b(y_1+r\sin\theta)^2 + 2g(x_1+r\cos\theta) + 2f(y_1+r\sin\theta) + c = 0.$$

(அ - து) $r^2[a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta]$
$+ 2r[(ax_1+hy_1+g)\cos\theta + (hx_1+by_1+f)\sin\theta]$
$+ ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1+c=0 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$

இது r-இல் இருபடிச் சமன்பாடு. இதன் தீர்வுகள் r_1, r^2 எனின், அவைகள் (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து வெட்டுப் புள்ளிகளின் தூரங்களை அளிக்கும்.

கோடு (1), கூம்பு வளைவு (2)-க்கு தொடுகோடெனின்,

$$r_1=r_2$$

$$\therefore \quad 4[(ax_1+hy_1+g)\cos\theta + (hx_1+by_1+f)\sin\theta]^2$$
$$= 4[a\cos^2\theta + 2h\cos\theta\sin\theta + b\sin^2\theta]$$
$$\times [ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c] \qquad \ldots (4)$$

(1)-இலிருந்து $\cos\theta = \frac{x-x_1}{r}$, $\sin\theta = \frac{y-y_1}{r}$.

$$\therefore \quad 4\left[(ax_1+hy_1+g)\frac{x-x_1}{r} + (hx_1+by_1+f)\frac{y-y_1}{r}\right]^2$$

$$= 4\left[a\left(\frac{x-x_1}{r}\right)^2 + 2h\frac{(x-x_1)(y-y_1)}{r^2} + b\left(\frac{y-y_1}{r}\right)^2 \right]$$

$$\times\ k\,[ax_1^2 + 2hx_1y_1 + by_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c].$$

வழக்கமான குறியீட்டில்,

$$[(ax_1+hy_1+g)(x-x_1)+(hx_1+by_1+f)(y-y_1)]^2$$

$$= [a(x-x_1)^2+2h(x-x_1)(y-y_1)+b(y-y_1)^2]\,S_1.$$

$$\therefore\ [axx_1+hxy_1+gx-ax_1^2-hx_1y_1-gx_1+hx_1y+byy_1 +fy-hx_1y_1-by_1^2-fy_1]^2$$

$$= \{(ax^2+2hxy+by^2)-2[axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1] + (ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2)\}\,S_1$$

(அ-து) $$[(axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+gx+fy) -(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+gx_1+fy_1)]^2$$

$$= \{(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c) -2[axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c] +(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)\}\,S_1$$

(அ-து) $$[(axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c) -(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)]^2$$

$$= \{S-2T+S_1\}\,S_1$$

(அ-து) $$[T-S_1]^2=SS_1-2TS_1+S_1^2.$$

$$T^2-2TS_1+S_1^2=SS_1-2TS_1+S_1^2.$$

$$\therefore\ T^2=SS_1.$$

இங்கு $S=ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c.$

$S_1=ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c.$

$T=axx_1+h(xy_1+x_1y)+byy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c.$

9·20. குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0 \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

(x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவு (1-க்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு

$$T^2=SS_1$$

(அ-து) $[x(ax_1+hy_1+g)+y(hx_1+by_1+f)+(gx_1+fy_1+c)]^2$
$=(ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c)$
$\times(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c) \ldots (2)$

இதில் x^2-இன் கெழு

$$=(ax_1+hy_1+g)^2-a(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c).$$

y^2-இன் கெழு

$$=(hx_1+by_1+f)^2-b(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c).$$

தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனின்,

சமன்பாடு (2)-இன்

x^2-இன் கெழு + y^2-இன் கெழு $= 0$.

$$\therefore \quad (ax_1+hy_1+g)^2+(hx_1+by_1+f)^2 =(a+b)(ax_1^2+2hx_1y_1+by_1^2+2gx_1+2fy_1+c)$$

(அ-து) $(ab-h^2)(x_1^2+y_1^2)+2x_1(gb-hf)$
$+2y_1(af-gh)+c(a+b)-f^2-g^2=0.$

எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியின் இயங்கு வழி

$$(ab-h^2)x^2+(ab-h^2)y^2+2(bg-fh)x+2(af-gh)y+c(a+b)-f^2-g^2=0.$$

இஃது ஒரு வட்டத்தின் சமன்பாடாகும். எனவே, (x_1, y_1) புள்ளியிலிருந்து கூம்பு வளைவு (1)-க்கு வரையும் இரட்டைத் தொடு கோடுகள் தம்முள் செங்குத்தெனின், (x_1, y_1) புள்ளியின்

இயங்கு வழி ஒரு வட்டமாகும். இது கூம்பு வளைவின் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் எனப்படும்.

இந்த வட்டத்தின் சமன்பாட்டை

$$Cx^2 + Cy^2 - 2Gx - 2Fy + A + B = 0$$

என எழுதலாம். இதன் மையம் $\left(\frac{G}{c}, \frac{F}{c}\right)$. இது கூம்பு வெட்டியின் மையமாகும்.

கூம்பு வெட்டி பரவளைவு எனின்,

$$ab - h^2 = 0 \quad (\text{அ-து}) \quad c = 0.$$

அத் நிலையில் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்

$$2Gx + 2Fy - A - B = 0$$

எனும் கோடாகிறது.

9·21. மையக் கூம்பு வளைவின் நான்கு குவியங்களில் இரண்டு மெய்யானவை.

மையக் கூம்பு வளைவின் (central conic) சமன்பாடு

$$ax^2 + by^2 = 1 \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

எனக் கொள்வோம்.

குவியங்களில் ஒன்றின் ஆயத் தொலைகள் (x_1, y_1) எனவும், ஒத்த இயக்கு வரை $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ எனவும் கொள்வோம்.

மையத் தொலைவிகிதம் e எனின்,

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}{(x\cos\alpha+y\sin\alpha-p)^2} = e^2$$

(அ-து) $(x-x_1)^2+(y-y_1)^2 = e^2[x\cos\alpha+y\sin\alpha-p]^2 \ldots (2)$

சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

சமன்பாடு (1)-இல் xy-இன் கெழு பூச்சியமாதலின் சமன்பாடு (2)-இலும் xy-இன் கெழு பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad e^2 \sin \alpha \cos \alpha = 0.$$

$$e \neq 0. \quad \therefore \quad \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

(அ-து) $\sin 2\alpha = 0$.

எனவே, $\alpha = 0$ (அ-து) $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ ஆகும்.

$\therefore$ இயக்குவரை அச்சுக்களில் யாதேனும் ஒன்றுக்கு இணையாகும்.

மேலும், சமன்பாடு (1)-இல் x, y-இன் கெழுக்கள் பூச்சியமாதலின், சமன்பாடு (2)-இலும் x, y-இன் கெழுக்கள் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \quad 2pe^2 \cos \alpha - 2x_1 = 0$$

$$2pe^2 \sin \alpha - 2y_1 = 0$$

(அ-து) $x_1 = pe^2 \cos \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$$y_1 = pe^2 \sin \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

மீண்டும். சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து

$$\frac{a}{1 - e^2 \cos^2 \alpha} = \frac{b}{1 - e^2 \sin^2 \alpha} = \frac{-1}{x_1^2 + y_1^2 - p^2 e^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

வகை (i) $\alpha = 0$ எனின், சமன்பாடுகள் (3), (4), (5)-இலிருந்து

$$x_1 = pe^2, \; y_1 = 0, \; e = \sqrt{1 - \frac{a}{b}}.$$

$$apx_1 = 1, \quad x_1^2 = \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \text{ என்றாகும்.}$$

$$\therefore \quad x_1 = \pm \sqrt{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}.$$

எனவே, மையத்திலிருந்து $\pm\sqrt{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$ தூரத்தில் x ஆயத்தின்மீது இரு குவியங்கள் உண்டு.

மேலும், $(x_1, 0)$ புள்ளியின் இசைக்கோடு

$$axx_1 + by(0) = 1$$

(அ-து) $x_1 = \frac{1}{ax_1} = p$ $\qquad [\because\ apx_1 = 1]$.

$\therefore$ குவியத்தின் இசைக்கோடு அதன் ஒத்த இயக்குவரையாகும்.

வகை (ii) $\alpha = \frac{\pi}{2}$ எனின், சமன்பாடுகள் (3), (4), (5)-இலிருந்து

$$x_1 = 0,\ y_1 = pe^2,\ e = \sqrt{1-\frac{b}{a}},\ bpy = 1,$$

$$y_1^2 = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} \text{ என்றுகும்.}$$

$$\therefore\ y_1 = \pm\sqrt{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}.$$

எனவே, y ஆயத்தின்மீது மற்றுமிரு குவியங்கள் மையத்திலிருந்து $\pm\sqrt{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}$ தூரத்திலுள்ளது.

குவியங்களின் ஆயத்தொலைகள்

$$\left[\pm\sqrt{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)},\ 0\right],\ \left[0,\ \pm\sqrt{\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)}\right]$$

a, b இரண்டும் மெய்மதிப்புக்கள் கொண்டிருப்பின் ஓர் ஆயத்தின் மீதுள்ள இரு குவியங்கள் மெய்யானவையாகவும், பிறிதோர் ஆயத்தின் மீதுள்ள குவியங்கள் கற்பனையாகவும் இருக்கும் என்பது தெளிவாகிறது.

மீண்டும், மையத்தொலை விகிதங்கள் e_1, e_2 எனின்,

$$\frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = \frac{a}{a-b} + \frac{b}{b-a} = \frac{a-b}{a-b} = 1.$$

9·22. ஐந்து குறித்த புள்ளிகளின் வழி ஒரே ஒரு கூம்பு வளைவு மட்டுமே வரையக் கூடும்

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0 \quad \dots \ (1)$$

இரு பக்கமும் c-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{a}{c}x^2 + \frac{2h}{c}yx + \frac{b}{c}y^2 + \frac{2g}{c}x + \frac{2f}{c}y + 1 = 0.$$

(அ - து) $Ax^2 + 2Hxy + By^2 + 2Gx + 2Fy + 1 = 0.$
என்றாகும். ... (2)

சமன்பாடு (2)-இல் A, H, B, G, F என்ற ஐந்து மாறிலிகளைத் தீர்மானிக்க இவைகளை இணைந்த ஐந்து சமன்பாடுகளைக் காண வேண்டும். ஐந்து புள்ளிகள் கொடுக்கப் பட்டுள்ளனவெனின், இப்புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு வளைவில் அவைகளின் ஆயத் தொலைகள் பொருந்தும். எனவே, நமக்குக் கிடைக்கும் ஐந்து சார்பிலாச் சமன்பாடுகளிலிருந்து (independent equations) கூம்பு வளைவை ஒரே முறையில் (uniquely) தீர்மானிக்கலாம்.

9·23. இரு கூம்பு வளைவுகள் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

கூம்பு வளைவுகளின் சமன்பாடுகள்

$$a_1x^2 + 2h_1xy + b_1y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0 \quad (1)$$

$$a_2x^2 + 2h_2xy + b_2y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2 = 0 \ \dots \ (2)$$

இவைகளை x-இன் இருபடிச் சமன்பாடுகளாக மாற்றி அமைக்கலாம்.

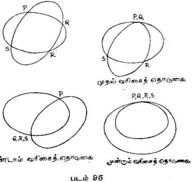
$$\therefore \ a_1x^2 + 2(h_1y + g_1)x + b_1y^2 + 2f_1y + c_1 = 0$$

$$a_2x^2 + 2(h_2y + g^2)x + b_2y^2 + 2f_2y + c_2 = 0.$$

இவைகளிலிருந்து x-ஐ நீக்கினால், y-இல் நாற்படிச் சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறும். எனவே, y-க்கு நான்கு மதிப்புகள் உண்டு.

இந் நான்கு மதிப்புக்களுக் கேற்ப x-க்கு நான்கு மதிப்புக்கள் இருக்குமாதலின், இரு கூம்பு வளைவுகளும் நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டும்.

இப் புள்ளிகளிலிரண்டு பொருந்தும் புள்ளிகளெனின், இரு வளைவுகளின் தொடுகை, முதல் வரிசைத் தொடுகை (contact of first order) எனவும், மூன்று பொருந்தும் புள்ளிகளெனின், இரண்டாம் வரிசைத் தொடுகை (contact of second order) எனவும், நான்கும் பொருந்தும் புள்ளிகளெனின் மூன்றும் வரிசைத் தொடுகை (contact of third order) எனவும் கூறப்படும்.



படம் 95

9·24. இரு கூம்புவளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

இரு கூம்புவளைவின் சமன்பாடுகள் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ எனக் கொள்வோம்.

பின் $S_1 + \lambda S_2 = 0$ என்ற சமன்பாட்டைக் கருதுவோம். இச்சமன்பாடு $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ என்ற கூம்புவளைவுகளுக்குப் பொதுவான புள்ளிகளுக்குப் பொருந்தும். இஃது இருபடியில் இருக்கு

மாதலின் $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ கூம்புவளைவுகள் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பின் சமன்பாடு

$$S_1 + \lambda S_2 = 0$$ என்றாகும்.

மற்றொரு கட்டுப்பாடு கொடுக்கப் பெறின், λ-வின் மதிப்பு அறிந்து, குறித்த கூம்பு வளைவின் சமன்பாட்டைப் பெறலாம்.

இவ்வாறே $S = 0$ கூம்பு வளைவும், $L_1 = 0$, $L_2 = 0$ என்ற கோடுகளும் வெட்டும் புள்ளிகள் வழிச் செல்லும் கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$S + \lambda L_1 L_2 = 0$$ ஆகும்.

9·25. பொதுக் குவியக் கூம்பு வளைவுகள்

பல்வேறு கூம்புகளின் குவியங்கள் பொதுவானவை எனின், அக் கூம்பு வளைவுகள் பொதுக் குவிய கூம்பு வளைவுகள் (confocal conics) எனப் படும்.

குவியங்கள் பொதுவானவை யாதலின், அச்சுக்களும் பொதுவானவையாகும்.

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$

எனும் சமன்பாடு λ-வின் பல்வேறு மதிப்புக்களுக்கும் வெவ்வேறு பொதுக் குவிய கூம்பு வளைவுகளை அளிக்கும். எனவே, பொதுக் குவிய நீள் வட்டங்களின் பொதுச் சமன்பாடு

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$$ ஆகும்.

கீழ்க்காணும் பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளின் பண்புகளை எளிதில் நிறுவலாம்.

1. இரு பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள் செங்குத்தாக வெட்டிக் கொள்ளும்.

2. பொதுக்குவியக் கூம்புவளைவுகளைச் சார்ந்த ஒருகோட்டின் இசைப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி ஒரு நேர்க்கோடாகும்.

3. கூம்புவளைவின் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளி வழி வரையக் கூடிய இரு பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளில் ஒன்று அதிபர வளைவு, மற்றது நீள் வட்டமாகும்.

பயிற்சி 9.2.

1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ நீள் வட்டத்துடன் பொதுக்குவியம் கொண்ட $\frac{x^2}{a^2+\lambda_1}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_1}=1$, $\frac{x^2}{a^2+\lambda_2}+\frac{y^2}{b^2+\lambda_2}=1$ என்ற கூம்பு வளைவுகள் (x_1, y_1) புள்ளி வழிச் செல்லின் $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-1=\frac{\lambda_1\lambda_2}{a^2b^2}$, $x_1^2+y_1^2-a^2-b^2=\lambda_1+\lambda_2$ என நிறுவுக.

2. λ_1, λ_2 என்பவை $P(x_1, y_1)$ புள்ளி வழிச் செல்லும் பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளின் துணையலகுகள். P புள்ளியிலிருந்து $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற நீள் வட்டத்திற்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் இடையேயுள்ள கோணம் 2θ எனின், $\tan 2\theta=\frac{2\sqrt{-\lambda_1\lambda_2}}{\lambda_1+\lambda_2}$ என நிறுவுக.

3. $ax^2+2hxy+by^2=1$ என்ற கூம்பு வளைவின் அச்சுக்கள் தம் சமன்பாடு $xy(a-b)=h(x^2-y^2)$ என நிறுவுக.

4. $ax^2+2hxy+by^2=1$, $Ax^2+2Hxy+By^2=1$ என்பவை பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகளெனின்,

$$\frac{(a-b)^2+4h^2}{(ab-h^2)^2}=\frac{(A-B)^2+4H^2}{(AB-H^2)^2}$$ என நிறுவுக.

5. குறித்த ஒரு கோட்டைத் தொடும்படி $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ என்ற கூம்பு வளைவுடன் பொதுக்குவியம் கொண்டுள்ள கூம்பு வளைவு ஒன்றுதான் உண்டு என நிறுவுக.

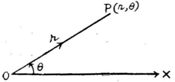
10. கோண தூர சமன்பாடுகள்

(Polar Equations)

10·1. கோண தூரக் கூறுகள் (Polar Co ordinates)

தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டும் OX, OY என்ற கோடுகளைப் பொறுத்து ஒரு புள்ளியைத் தீர்மானிப்பதை நாம் முன்னர்க் கண்டோம். இந்த அத்தியாயத்தில் தளத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியைத் தீர்மானிக்கப் பயனுறும் மற்றொரு வழியைக் காண்போம்.

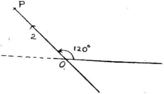
O என்ற ஒரு நிலைத்த புள்ளியையும், O வழிச் செல்லும் OX என்ற ஒரு நிலையான கோட்டையும் சார்ந்து தளத்திலுள்ள எந்த ஒரு புள்ளியையும் தீர்மானிக்கலாம். எடுத்துக் காட்டாக, P என்ற புள்ளியைத் தீர்மானிக்க O புள்ளியிலிருந்து அதன் தூரத்தையும், OP கோடு OX கோட்டுடன் பிறப்பிக்கும் கோணத்தையும் P புள்ளியின் கூறுகளாகக் கொள்ளலாம். $OP=r$, $\angle XOP=\theta$ எனின் P புள்ளியின் கூறுகள் (r, θ) ஆகும். இதைக் கோண தூரக் கூறுகள் என்கிறோம், O, OX என்பவை முறையே முனைவு (pole), தொடக்கக் கோடு (initial line) எனப்படும். r, θ என்பவை முறையே ஆரை வெக்டர் (radius vector). ஆரைக் கோணம் (vectorial angle) எனப்படும். ஆரைக் கோணம் இடஞ்



படம் 95 (a)

சுழியாக (anti-clockwise) அளக்கப்பட்டால் நேர் மதிப்பு உடையதாகவும், வலஞ் சுழியாக அளக்கப்பட்டால் எதிர் மதிப்பு உடையதாகவும் கொள்ளப்படும். ஆரை வெக்டர் முனையிலிருந்து புள்ளியின் திசையில் அளக்கப்பட்டால் நேர் மதிப்பும், எதிர்த் திசையில் அளக்கப்படின் எதிர் மதிப்பும் கொண்டிருக்கும்.

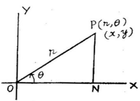
மாதிரி 1 :



படம் 96

படத்தில் கோண தூரக் கூறுகள் $(2, 120°)$, $(-2, 300°)$, $(2, -240°)$, $(-2, -60°)$ அனைத்தையும் P என்ற ஒரே புள்ளியைக் குறிக்கும்.

10·2. தேக்காட்டின் ஆயத் தொலைகளும் (Cartesian Coordinates), கோண தூரக் கூறுகளும்



படம் 97

O புள்ளியை முனைவாகவும் OX-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொண்டால் P புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகள் (r, θ) ஆகும்.

இங்கு $OP = r$, $\angle XOP = \theta$.

P புள்ளியிலிருந்து OX-க்குச் செங்குத்தாக PN என்ற கோடு வரையவும்.

OX, OY ஆயங்களைப் பொறுத்து P புள்ளியின் ஆயத் தொலைகள் (x, y) என்போம்.

படத்தில், $ON = x$, $NP = y$.

செங்கோண முக்கோணம் NOP-யில்,

$$x = ON = OP \cos\theta = r\cos\theta$$

$$y = NP = OP \sin\theta = r\sin\theta$$

$$r = OP = \sqrt{ON^2 + NP^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\tan\theta = \frac{NP}{ON} = \frac{y}{x}.$$

மாதிரி 2 : பின்வரும் கார்டிசியன் (தேக்காட்டின்) சமன்பாடுகளைக் கோண தூர சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

(i) $ax + bx + c = 0$ (ii) $x^2 + y^2 = a^2$ (iii) $x^2 + y^2 = ay$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனப் பிரதியிடின்,

(i) $ar\cos\theta + br\sin\theta + c = 0$

$$a\cos\theta + b\sin\theta + \frac{c}{r} = 0$$

(அ-து) $a\cos\theta + b\sin\theta = \dfrac{k}{r}$, $k = -c$.

(ii) $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = a^2$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2$$

$\therefore$ $r^2 = a^2$ (அ-து) $r = a$.

(iii) $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = ar\sin\theta$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = ar\sin\theta$$

$\therefore$ $r^2 = ar\sin\theta$

(அ - து) $r = a\sin\theta$.

மாதிரி 3 : $r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$ என்ற சமன்பாட்டைத் தேக் காட்டின் சமன்பாடாக மாற்றுக.

$$r^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

இரு புறமும் வர்க்கப்படுத்தினால்

$$r = a \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{a}{2} (1 + \cos \theta)$$

(அ - து) $2r = a (1 + \cos \theta)$.

இரு பக்கமும் r ஆல் பெருக்க,

$$2r^2 = ar (1 + \cos \theta)$$

$r \cos \theta = x$, $r^2 = x^2 + y^2$ எனப் பிரதியிடின்,

$$2(x^2 + y^2) = a [\sqrt{x^2 + y^2} + x]$$

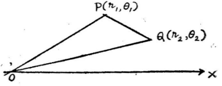
$$\therefore \quad 2x^2 + 2y^2 - ax = a\sqrt{x^2 + y^2}$$

இரு பக்கமும் வர்க்கப்படுத்தினால்,

$$(2x^2 + 2y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

10·3. (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) புள்ளிகளுக்கிடையேயுள்ள தூரம்

P, Q புள்ளிகளின் ஆயத்தொலைகள் (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) எனக் கொள்வோம்.



படம் 98

$OP = r_1, \quad \angle XOP = \theta_1$

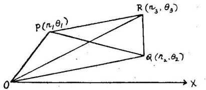
$OQ = r_2, \quad \angle XOQ = \theta_2.$

$\triangle OPQ$-வில், $PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos \angle QOP$
$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$

$\therefore \; PQ = \sqrt{\{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)\}}$.

10·4. முக்கோணத்தின் பரப்பு

முக்கோணத்தின் மூன்று முனைகள் $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$, $R(r_3, \theta_3)$ எனக் கொள்வோம்.



படம் 99

$\triangle PQR = \triangle OQR + \triangle ORP - \triangle OQP$

$\triangle OQR = \frac{1}{2} OQ.OR \sin \angle QOR = \frac{1}{2} r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)$

$\triangle ORP = \frac{1}{2} OR.OP \sin \angle ROP = \frac{1}{2} r_3r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$

$\triangle OQP = \frac{1}{2} OQ.OP \sin \angle QOP = \frac{1}{2} r_2r_1 \{\sin(\theta_1 - \theta_2).$

$\therefore \; \triangle PQR = \frac{1}{2} [r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) + r_3r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)$
$- r_2r_1 \sin(\theta_1 - \theta_2)]$

$= \frac{1}{2} [r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2)$
$+ r_3r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)].$

மாதிரி 4 : $P(1, 30^\circ)$, $Q(2, 60^\circ)$, $R(3, 90^\circ)$ என்ற புள்ளிகளாலமையும் முக்கோணத்தின் பரப்பைக் காண்க.

$$\triangle PQR = \frac{1}{2}[r_1 r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + r_2 r_3 \sin(\theta_3 - \theta_2) - r_3 r_1 \sin(\theta_1 - \theta_3)]$$

இங்கு $r_1 = 1,\ r_2 = 2,\ r_3 = 3$

$$\theta_1 = 30^\circ,\ \theta_2 = 60^\circ,\ \theta_3 = 90^\circ.$$

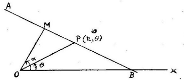
$$\therefore\quad \triangle PQR = \frac{1}{2}\{2 \sin 30 + 6 \sin 30 + 3 \sin(-60)\}$$

$$= \frac{1}{2}\left[2.\frac{1}{2} + 6.\frac{1}{2} - 3.\frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + 3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= 2 - \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

10·5. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு



படம் 100

AB ஒரு நேர்க்கோடெனவும், O புள்ளியிலிருந்து AB-க்கு வரையப்பட்ட செங்குத்துக் கோடு OM எனவும் கொள்வோம்.

$OM = p$ என்போம். OM கோடு தொடக்கக்கோடு OX உடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் α என்க.

$P(r, \theta)$ புள்ளி AB கோட்டின் மீதுள்ளதெனின், $OP = r$, $\angle XOP = \theta$.

செங்கோண முக்கோணம் OPM-இல்

$$p = OP \cos \angle POM = r \cos (\alpha - \theta) = r \cos (\theta - \alpha).$$

$\therefore$ AB கோட்டின் சமன்பாடு

$$p = r \cos (\theta - \alpha).$$

குறிப்பு : AB கோட்டின் தேக்காட்டின் சமன்பாடு

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = p.$$

$x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ எனப் பிரதியிடின்,

$$r \cos \theta \cos \alpha + r \sin \theta \sin \alpha = p.$$

$\therefore$ $r \cos (\theta - \alpha) = p$ என்றாகும்.

10·6. குறித்த இரு புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் சமன்பாடு காணல்

குறித்த இரு புள்ளிகள் $P(r_1, \theta)$, $Q(r_2, \theta_2)$ எனக் கொள்வோம். PQ கோட்டின்மீது $R(r, \theta)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளியெனின், ΔPQR-இன் பரப்புப் பூச்சியமாகும்.

$$\therefore \frac{1}{2}\left[r_1 r_2 \sin (\theta_2 - \theta_1) + r_2 r \sin (\theta - \theta_2) + r r_1 \sin (\theta_1 - \theta) \right] = 0.$$

இரு பக்கமும் $r r_1 r_2$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{r} + \frac{\sin (\theta - \theta_2)}{r_1} + \frac{\sin (\theta_1 - \theta)}{r_2} = 0$$

(அ-து) $$\frac{\sin (\theta_2 - \theta_1)}{r} = \frac{\sin (\theta_2 - \theta)}{r_1} + \frac{\sin (\theta - \theta_1)}{r_2}.$$

10·7. நேர்க்கோட்டின் சமன்பாடு—பொதுவடிவம்

தேக்காட்டின் கூறுகளில் ஒரு நேர்க்கோட்டின் பொதுச் சமன்பாடு $ax + by + c = 0$.

$x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ எனப் பிரதியிடின்,

$$ar\cos\theta + br\sin\theta + c = 0$$

(அ-து) $a\cos\theta + b\sin\theta = -\dfrac{c}{r}$.

$l = -c$ எனக் கொண்டால்,

நேர்க்கோட்டின் பொதுச்சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta \quad \text{என்றாகும்.}$$

இனி (1) $a\cos\theta + b\sin\theta = \dfrac{l}{r}$ கோட்டிற்கிணையாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $a\cos\theta + b\sin\theta = \dfrac{l'}{r}$ வடிவிலும், செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு $b\cos\theta - a\sin\theta = \dfrac{K}{r}$ என்ற வடிவிலும் இருக்கும்.

(2) $p = r\cos(\theta - \alpha)$ கோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$p' = r\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \alpha\right) \text{ ஆகும்.}$$

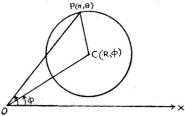
(3) $\theta = \alpha$ என்பது முனைவு (pole) வழிச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடாகும். இங்கு α என்பது அக் கோடு தொடக்கக் கோட்டுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம்.

10·8. (R, ϕ) புள்ளியை மையமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

வட்டத்தின்மையம் C எனவும், அதன் ஆரம் a எனவும் கொள்வோம்.

$P(r, \theta)$ என்பது வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளியெனின்

$$\triangle OCP\text{-யில், } CP^2 = OC^2 + OP^2 - 2OC.OP\cos\angle COP$$



படம் 101.

(அ-து) $a^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos(\theta-\phi)$.

எனவே, வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2rR\cos(\theta-\phi) + (R^2 - a^2) = 0.$$

கிளை : (1) முனைவு வட்ட மையமெனின், வட்டத்தின் சமன்பாடு $r = a$ ஆகும்.

(2) வட்ட மையம் தொடக்கக் கோட்டின் மீதமையு மெனின் $\phi = 0$.

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2rR\cos\theta + (R^2 - a^2) = 0.$$

(3) முனைவு பரிதியின் மீதமையுமெனின், $R = a$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2ra\cos(\theta-\phi) = 0$$

(அ-து) $r = 2a\cos(\theta-\phi)$.

(4) மையம் தொடக்கக் கோட்டின்மீதும், முனைவு பரிதியின் மீதும் அமையுமெனின்,

$$\phi = 0, \quad R = a.$$

∴ வட்டத்தின் சமன்பாடு,

$$r^2 - 2ra\cos\theta = 0$$

(அ-து) $r = 2a\cos\theta$.

(5) வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - 2rR\cos(\theta-\phi) + (R^2-a^2) = 0.$$

இதன் தீர்வுகள் r_1, r_2 எனின்,

தீர்வுகளின் பெருக்குத்தொகை, $r_1 r_2 = R^2 - a^2$.

இது θ-வைச் சாராத ஒரு மாறிலியாகும்.

எனவே, முனைவு O விலிருந்து எத்திசையிலும் வட்டத்திற்கு வரையும் கோடு வட்டத்தை P, Q புள்ளிகளில் வெட்டுமெனின், $OP.OQ$ ஒரு மாறிலியாகும்.

10·9. $r = 2a\cos\theta$ வட்டத்தின் மீதுள்ள (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு காணல்

வட்டத்தின் மீதுள்ள யாதேனும் இரு புள்ளிகள் P, Q-வின் ஆயக்கூறுகள் (r_1, θ_1), (r_2, θ_2) எனவும், நாண் PQ-வின் சமன்பாடு

$$p = r\cos(\theta-\alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

எனவும் கொள்வோம்.

P, Q புள்ளிகள் கோடு (1)-இன் மீதிருப்பதால்,

$$p = r_1\cos(\theta_1-\alpha) = 2a\cos\theta_1\cos(\theta_1-\alpha) \ldots \quad (2)$$

$$p = r_2\cos(\theta_2-\alpha) = 2a\cos\theta_2\cos(\theta_2-\alpha) \ldots \quad (3)$$

$$\therefore \quad 2a\cos\theta_1\cos(\theta_1-\alpha) = 2a\cos\theta_2\cos(\theta_2-\alpha)$$

(அ-து) $\cos(2\theta_1-\alpha)+\cos\alpha = \cos(2\theta_2-\alpha)+\cos\alpha \ldots (4)$

$$\therefore \quad \cos(2\theta_1-\alpha) = \cos(2\theta_2-\alpha)$$

(அ-து) $2\theta_1-\alpha = -(2\theta_2-\alpha)$ $\quad [\because \theta_1 \neq \theta_2]$.

$$\therefore \quad \theta_1+\theta_2 = \alpha.$$

சமன்பாடு (2)-இலிருந்து

$$p = 2a\cos\theta_1\cos(\theta_1 - \overline{\theta_1 + \theta_2})$$
$$= 2a\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

இதைச் சமன்பாடு (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$r\cos(\theta - \overline{\theta_1 + \theta_2}) = 2a\cos\theta_1\cos\theta_2.$$

எனவே, நாணின் சமன்பாடு

$$r\cos(\theta - \theta_1 - \theta_2) = 2a\cos\theta_1\cos\theta_2 \quad \dots \quad (5)$$

கிளை : சமன்பாடு (5)-இல் $\theta_2 = \theta_1$ எனப் பிரதியிடின்,

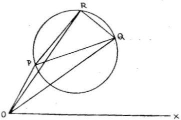
$$r\cos(\theta - 2\theta_1) = 2a\cos^2\theta_1.$$

எனவே, (r_1, θ_1) புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$r\cos(\theta - 2\theta_1) = 2a\cos^2\theta_1.$$

மாதிரி 5 : $P(r_1, \theta_1)$, $Q(r_2, \theta_2)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு காண்க.

$R(r, \theta)$, பரிதியின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக் கொள்வோம்.



படம் 102

$$PR^2 = OP^2 + OR^2 - 2OP.OR\cos\angle ROP$$
$$= r_1^2 + r^2 - 2r_1 r\cos(\theta_1 - \theta)$$

$$QR^2 = OR^2 + OQ^2 - 2OQ.OR \cos \angle QOR$$
$$= r^2 + r_2^2 - 2r_2 r \cos(\theta - \theta_2).$$

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2OP.OQ \cos \angle QOP$$
$$= r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2).$$

$\therefore \quad \angle PRQ = 90°,$

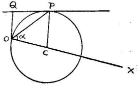
$$PQ^2 = PR^2 + QR^2.$$

$$\therefore \quad r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$
$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r^2 - 2r[r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_2 \cos(\theta - \theta_2)].$$

$$\therefore \quad r^2 = r[r_1 \cos(\theta - \theta_1) + r_2 \cos(\theta - \theta_2)] - r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$$

(அ-து) $r^2 - rr_1 \cos(\theta - \theta_1) - rr_2 \cos(\theta - \theta_2) + r_1 r_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)$

மாதிரி 6 : $r = 2a \cos\theta$ வட்டத்தின் தொடுகோடுகளுக்கு முனைவிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகள்தம் அடிப் புள்ளி களின் இயங்கு வழிக் காண்க.



படம் 103.

முனைவு O எனவும், தொடக்கக் கோடு OX எனவும் கொள் வோம்.

$P(R, \alpha)$ பரிதியின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின், P-இடத்துத் தொடுகோடு

$$r \cos(\theta - 2\alpha) = 2a \cos^2\alpha \qquad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

முனையிலிருந்து தொடு கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோட்டின் அடிப் புள்ளி $Q(r_1, \theta_1)$ எனின்,

சமன்பாடு (1)-இன் வடிவிலிருந்து,

$$r_1 = OQ = 2a\cos^2\alpha$$

$$\angle XOQ = \theta_1 = 2\alpha.$$

எனவே, $r_1 = 2a\cos^2\alpha$

$$= a(1 + \cos 2\alpha)$$

$$= a(1 + \cos\theta_1).$$

$\therefore$ $Q(r_1, \theta_1)$ புள்ளியின் இயங்கு வழி $r = a(1 + \cos\theta)$.

பயிற்சி 10.1.

1. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைக் கோண தூர சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

   (i) $y = x\tan\alpha$

   (ii) $x^2 = y^2 + 2ay$

   (iii) $x^2 + y^2 = 2ax$.

2. கீழ்க் காணும் சமன்பாடுகளைத் தேக்காட்டின் சமன்பாடுகளாக மாற்றுக.

   (i) $r = a\sin\theta$

   (ii) $r = a\sin 2\theta$

   (iii) $r^{\frac{1}{2}}\cos\dfrac{\theta}{2} = a^{\frac{1}{2}}$.

3. $(-8, 30°)$, $(5, 150°)$, $(7, 210°)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பரப்புக் காண்க.

4. $(2, 30°)$, $(4, 120°)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டின் நீளம் காண்க.

5. $(0, 0°)$, $(3, 90°)$, $(3, 30°)$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணம் ஒரு சமபக்க முக்கோணம் என நிறுவுக.

6. $r = 2a \cos\theta$ வட்டத்தின் மீதுள்ள $\theta=\theta_1, \theta=\theta_2, \theta=\theta_3$ புள்ளிகளை உச்சிகளாகக் கொண்ட முக்கோணத்தின் பக்கங்களுக்கு முனைவிலிருந்து வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகள் $r\cos(\theta-\theta_1-\theta_2-\theta_3) = 2a\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3$ என்ற கோட்டின் மீதமையும் என நிறுவுக.

7. λ துணையலகு எனின், $r^2-\lambda r\cos(\theta-\alpha)+\lambda p=0$ எனும் சமன்பாடு, பொது அச்சு வட்டங்களைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

8. $r = 2a\cos(\theta-\alpha)$ வட்டத்திற்கு 'β' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு காண்க.

9. $r=r_1\cos(\theta-\alpha)$, $r=r_2$ வட்டங்கள் செங்கோணத்தில் தம்முள் வெட்டும் என நிறுவுக.

10. $r^2\cos\theta - ar\cos 2\theta - 2a^2\cos\theta = 0$ எனும் சமன்பாடு ஒரு வட்டத்தையும், ஒரு நேர்க்கோட்டையும் குறிக்கும் என நிறுவுக.

11. $\frac{l}{r} = a\cos\theta + b\sin\theta$ எனும் கோடு, $r = 2\alpha\cos\theta$ வட்டத்திற்குத் தொடுகோடாக அமையத் தேவையான கட்டுப்பாடு காண்க.

12. $(2, 90°)$, $(3, 60°)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் கோட்டை விட்டமாகக் கொண்ட வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2 - r[2\cos(\theta-90)+3\cos(\theta-60)] + 3\sqrt{3}=0$$

என நிறுவுக.

விடைகள்

1. (i) $\theta=\alpha$; (ii) $r\cos 2\theta = 2a\sin\theta$; (iii) $r=2a\cos\theta$.

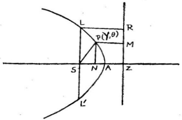
2. (i) $x^2+y^2=ay$; (ii) $(x^2+y^2)^2=4a^2x^2y^2$;

(iii) $y^2+4ax=4a^2$.

3. $\frac{7\sqrt{3}}{2}$. 4. $2\sqrt{5}$. 11. $b^2d^2+2ad=1$.

10·10. கூம்பு வளைவின் கோண தூரச் சமன்பாடு

குவியம் S, இயக்கு வரை ZM கொண்ட கூம்பு வளைவின் மையத் தொலை விகிதம் e எனக் கொள்வோம். S புள்ளியிலிருந்து இயக்கு வரைக்கு SZ என்ற செங்குத்துக் கோடு வரையவும்.



படம் 104.

S புள்ளியை முனைவாகவும், SZ-ஐ தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம். $P(r, \theta)$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனின்,

$$SP = r, \ \angle ZSP = \theta$$

P புள்ளியிலிருந்து SZ-க்கு PN என்ற செங்குத்துக் கோடு வரைக. LSL' கூம்பு வளைவின் செவ்வகலம் $LSL' = 2l$ என்போம். L புள்ளியிலிருந்து இயக்கு வரைக்குச் செங்குத்தாக LR கோடு வரையவும்.

கூம்பு வளைவின் வரையறையின் படி,

$$SL = e.LR = e.SZ$$

$$SP = e.PM = e.NZ$$

$$\text{(அ - து)} \quad SZ = \frac{SL}{e} = \frac{l}{e} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

$$r = SP = e.NZ \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

$$\therefore \quad r = e.NZ = e(SZ - SN)$$

$$= e\left[\frac{l}{e} - r\cos\theta\right]$$

(அ-து) $r = l - er\cos\theta$

$$\therefore \quad r[1 + e\cos\theta] = l$$

(அ-து) $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$.

கிளை 1: SZ-க்குப் பதில் தொடக்கக் கோட்டை ZS வழி எடுத்துக் கொண்டால் $\angle ASP = \pi - \theta$ ஆகும்.

$\therefore$ கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 - e\cos\theta.$$

கிளை 2: கூம்பு வளைவின் அச்சு, தொடக்கக் கோட்டுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் α எனின், SP என்ற கோடு அச்சுடன் $(\theta - \alpha)$ கோணத்தில் சாய்ந்திருக்கும். எனவே, கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$.

கிளை 3: மையத்தொலை விகிதம் e ஒன்றுக்குச் சமமாகவோ குறைவாகவோ, அதிகமாகவோ இருப்பின், கூம்புவளைவு முறையே ஒரு பரவளைவு, நீள் வட்டம் அல்லது அதிபரவளைவைக் குறிக்கும்.

$e = 1$ எனின், கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

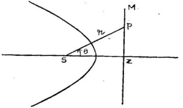
$$\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2}.$$

$\therefore$ பரவளைவின் சமன்பாடு $r = \frac{l}{2}\sec^2\frac{\theta}{2}$.

10·11. கூம்பு வளைவின் இயக்கு வரை

குவியம் S-ஐ முனைவாகவும், SZ-ஐத் தொடக்கக் கோடாகவும் கொள்வோம். ZM ஒத்த இயக்குவரையின்மீது $P(r, \theta)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்வோம்.

$\therefore\ SP = r,\ \angle ZSP = \theta.$



படம் 105

$SZ = SP \cos\theta$

(அ - து) $\frac{l}{e} = r\cos\theta.$

$\therefore$ இயக்கு வரையின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e\cos\theta.$

கிளை : $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$ என்ற கூம்பு வளைவில் குவியம் S-இன் ஒத்த இயக்கு வரை $\frac{l}{r} = e\cos(\theta - \alpha)$ ஆகும்.

10·12. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவு வரைதல்

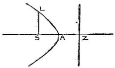
வகை (i) $e = 0$ எனின், சமன்பாடு $r = l$ என்ருகும். எனவே, கூம்பு வளைவு ஒரு வட்டமாகும். முனைவு இதன் மையமாகும். இதன் ஆரம் l.

வகை (ii) $e = 1$ எனின், சமன்பாடு $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$. எனவே, கூம்பு வளைவு வரையறையின் படி ஒரு பரவளைவைக் குறிக்கும்.

$\theta = 0$ எனின், $\frac{l}{r} = 1 + 1 = 2. \quad \therefore\ r = \frac{l}{2}.$

பரவளைவு அதன் அச்சை (தொடக்கக் கோடு) வெட்டும் புள்ளி $\left(\frac{l}{2},\ 0\right)$ ஆகும். θ-வின் மதிப்புப் பூச்சியத்திலிருந்து

அதிகரிக்கும்போது $(1+\cos\theta)$-வின் மதிப்புக் குறைகிறது. எனவே, r-இன் மதிப்பு அதிகரிக்கும். θ-வின் மதிப்பு π-ஐ நெருங்கும்போது, r-இன் மதிப்புக் கந்தழியை (infinity) நெருங்கும். θ-வின் மதிப்பு π-க்கு மேலும் அதிகரிக்கும்போது $(1+\cos\theta)$-வின் மதிப்பு அதிகரித்து, r-இன் மதிப்புத் தொடர்ந்து குறைந்து கொண்டே வந்து, $\theta = 2\pi$ என்ற மதிப்புக்கு $r=\frac{l}{2}$ என்ற மதிப்பை மீண்டும் பெறுகிறது. எனவே, பரவளைவு தொடக்கக் கோட்டுடன் சமச்சீர் பெற்றிருக்கும். பரவளைவின் வடிவம் படத்திலுள்ளது போலிருக்கும்.



படம் 106

வகை (iii) $0 < e < 1$ எனின், வரையறையின்படி கூம்பு வளைவு நீள்வட்டமாகும்.

$$\theta = 0 \text{ எனின், } \frac{l}{r} = 1 + e$$

$$\therefore \quad r = \frac{l}{1+e}.$$

$\cos\theta$-வின் மீப்பெரு மதிப்பு 1 ஆதலின் $\frac{l}{r}$-இன் மீப்பெரு மதிப்பு $(1+e)$ ஆகும். எனவே, r-இன் மீச்சிறு மதிப்பு $\frac{l}{1+e}$ ஆகும்.

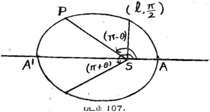
$$\theta = \pi \text{ எனின், } \frac{l}{r} = 1 - e.$$

$$\therefore \quad r = \frac{l}{1-e}.$$

$\cos\theta$-வின் மீச் சிறு மதிப்பு -1 ஆதலின், $\frac{l}{r}$-இன் மீச்சிறு மதிப்பு $(1-e)$. எனவே, r-இன் மீப்பெரு மதிப்பு $\frac{l}{1-e}$. r-இன் மதிப்பு $\frac{l}{1+e}$-இலிருந்து $\frac{l}{1-e}$-க்குத் தொடர்ந்து அதிகரிக்கும். நீள் வட்டம் அச்சை (தொடக்கக் கோடு) $A\left(\frac{l}{1+e}, 0\right)$, $A'\left(\frac{l}{1-e}, \pi\right)$ புள்ளிகளில் வெட்டும்.

θ-வின் மதிப்பு π-யிலிருந்து தொடர்ந்து 2π-க்கு அதிகரிக்கும் போது r-இன் மதிப்பு $\frac{l}{1-e}$-இலிருந்து தொடர்ந்து $\frac{l}{1+e}$-க்குக் குறையும். $\theta = \frac{\pi}{2}$ (அ-து) $\frac{3\pi}{2}$ எனின், $r = l$ ஆகும்.

மேலும், $\cos\theta = \cos(2\pi - \theta)$ ஆதலின், நீள் வட்டம் தொடக்கக் கோட்டுடன் சமச் சீர் பெற்றிருக்கும். நீள் வட்டத்தின் வடிவம் படத்திலிருப்பது போலிருக்கும்.



படம் 107.

வகை (iv) $e > 1$ எனின், வரையறையின் படி கூம்பு வளைவு அதிபரவளைவாகும்.

$\theta = 0$ எனின், $\frac{l}{r} = 1 + e$

$\therefore \quad r = \frac{l}{1+e}$.

படத்தில் $r = SA = \frac{l}{1+e}$.

θ அதிகரித்து $\cos\theta$-வின் மதிப்புக் குறையும்போது r-இன் மதிப்பு $1+e\cos\theta = 0$ வரை அதிகரிக்கும். $\frac{\pi}{2}$-க்கும், π-க்கும் இடைப் பட்டு நிற்கும் θ-வின் ஒரு மதிப்புக்கு (இதை α என்க) $1+e\cos\theta = 0$ ஆகும். படத்தில் இம்மதிப்பு $= \angle ASP$ ஆகும்.

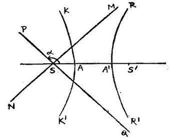
$$\therefore \quad r = \frac{l}{1+e\cos\theta} = \frac{l}{0} = \infty$$

$\theta = \alpha$ எனின், r-இன் மதிப்புக் கந்தழியாகும். θ-வின் இம் மதிப்புக்கள் படத்தில் AP என்ற பகுதியைக் குறிக்கும்.

θ-வின் மதிப்பு α-ஐக் கடந்து அதிகரிக்கும்போது r குறை யெண் மதிப்புக் (negative value) கொண்டிருக்கும். θ-வின் மதிப்பு α-விலிருந்து π-க்குத் தொடர்ந்து அதிகரிக்கும்போது r-இன் எண்ணளவு தொடர்ந்து குறையும். இவ் விடைவெளியில் r குறையெண் மதிப்புக் கொண்டிருக்கும்.

$$\theta = \pi \text{ எனின், } r = \frac{l}{1-e} = -\frac{l}{e-1}.$$

θ-வின் இம்மதிப்புக்கள் படத்தில் QA' பகுதியைக் குறிக்கும்.



படம் 108

θ-வின் மதிப்பு π-யிலிருந்து $(2\pi-\alpha)$-க்கு அதிகரிக்கும்போது படத்தில் MA' பகுதியும், $(2\pi-\alpha)$-விலிருந்து 2π-க்கு அதிகரிக்கும்போது NA என்ற பகுதியும் கிடைக்கப்பெறும்.

எனவே, படம் வரையும் போது முதலில் AKP என்ற பகுதி, பின் $QR'A'$ என்ற பகுதி, அதற்குப் பிறகு $A'MR$ பகுதி, கடைசியில் $NK'A$ பகுதி கிடைக்கப் பெறும். அதிபரவளைவு படத்தில் காட்டியுள்ளபடி இரு பகுதிகளைப் பெற்றிருக்கும்.

மாதிரி 7 : $\frac{2}{r} = 2 + \cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ என்ற கூம்பு வளைவு வரைக.

$$\frac{2}{r} = 2 + \cos + \sqrt{3}\sin\theta$$

$$\therefore\ \frac{1}{r} = 1 + \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta$$

$$= 1 + \cos\frac{\pi}{3}\cos\theta + \sin\frac{\pi}{3}\sin\theta$$

$$= 1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$$

(அ - து) $\frac{1}{r} = 1 + \cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right)$.

இது $\frac{l}{r} = 1 + e\cos(\theta - \alpha)$ வடிவிலுள்ளது. எனவே, கூம்பு வளைவின் குவியம் முனைவாகும். மேலும், கூம்பு வளைவின் அச்சு, தொடக்கக் கோட்டுடன் 60°-இல் சாய்வு கொண்டிருக்கும். $e = 1$ ஆதலின், கூம்பு வளைவு பரவளைவாகும்.

செவ்வகலத்தின் நீளம் $= 2 \times 1 = 2$.

பரவளைவின் முனைவு A எனின், $AS = \frac{1}{2}$. L, L' என்பவை செவ்வகலத்தின் நுனிகளெனின் $SL = SL' = 1$.

$\theta = 0$ எனில், $\frac{1}{r} = 1 + \cos 60 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$\therefore \quad r = \frac{2}{3}.$

$\theta = \pi$ எனின், $\frac{1}{r} = 1 + \cos(180-60)$

$$\therefore \quad \frac{1}{r} = 1 - \cos 60$$

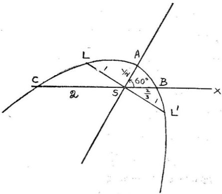
$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(அ - து) $r = 2.$

எனவே, பரவளைவு தொடக்கக் கோட்டை B, C புள்ளிகளில் சந்திப்பின்,

$$SB = \frac{2}{3}, \quad SC = 2.$$

பரவளைவின் படம் கீழே கொடுக்கப்பட்டுள்ளது.



படம் 109

மாதிரி 8 : $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$, $\frac{l}{r} = -1 + e\cos\theta$ என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற சமன்பாடு குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் மீது $P(r, \theta)$ யாதேனும் ஒரு புள்ளி எனக்கொள்வோம்.

P புள்ளியின் கோண தூரக்கூறுகளை $(-r, \pi+\theta)$ என எழுதலாம்.

$\therefore$ சமன்பாடு (1)-இல் $r = -r$, $\theta = \pi + \theta$ எனப் பிரதியிடின், $\frac{l}{-r} = 1 + e\cos(180 + \theta)$ என்றாகும்.

(அ-து) $\frac{l}{-r} = 1 - e\cos\theta$

$$\therefore \quad \frac{l}{-r} = -1 + e\cos\theta \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனவே, சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும்.

10·13. கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள இருபுள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{-r} = 1 + e\cos\theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள P, Q என்ற எவையேனும் இரு புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் α, β எனக் கொள்வோம்.

எனவே, அப் புள்ளிகளின் கோண தூரக் கூறுகள்,

$$P\left(\frac{l}{1+e\cos\alpha},\ \alpha\right),\ Q\left(\frac{l}{1+e\cos\beta},\ \beta\right).$$

PQ என்ற நாணின் சமன்பாடு

$$A\cos\theta + B\sin\theta = \frac{l}{r} \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

எனக் கொண்டால், P, Q புள்ளிகள் சமன்பாடு (2)-இல் பொருந்தும்.

$$\therefore\quad 1 + e\cos\alpha = A\cos\alpha + B\sin\alpha \qquad \ldots \qquad (3)$$

$$1 + e\cos\beta = A\cos\beta + B\sin\beta \qquad \ldots \qquad (4)$$

(அ-து) $1 = (A-e)\cos\alpha + B\sin\alpha \qquad \ldots \qquad (5)$

$$1 = (A-e)\cos\beta + B\sin\beta \qquad \ldots \qquad (6)$$

$[(5)\times\sin\beta - (6)\times\sin\alpha]$ எனின்,

$$\sin\beta - \sin\alpha = (A-e)\,[\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta]$$
$$= -(A-e)\sin(\alpha-\beta)$$

(அ-து) $-2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

$$= -2(A-e)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\therefore\quad (A-e)\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

$$\therefore\quad A = e + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

இவ்வாறே, $[(5)\times\cos\beta - (6)\times\cos\alpha]$ எனின்,

$$B = \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

A, B-யின் மதிப்புக்களைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r} = \left(e + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\theta + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\theta$$

(அ-து) $\dfrac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\dfrac{\alpha-\beta}{2}\left[\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\theta + \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\theta\right]$

$$= e\cos\theta + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

எனவே, நாண் PQ-வின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r}e = \cos\theta + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

கிளை 1 : கூம்புவளைவின் சமன்பாடு

$\frac{l}{r} = 1+e\cos(\theta-\gamma)$ எனின், α, β புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos(\theta-\gamma) + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

கிளை 2 : $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள $(\alpha-\beta)$, $(\alpha+\beta)$ புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta-\alpha).$$

10·14. α புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவின் மீதுள்ள 'α', 'β' புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாணின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad \ldots (2)$$

'β' புள்ளி 'α' புள்ளியை நெருங்கி முடிவில் அதனுடன் பொருந்தும்போது அப் புள்ளிகளைச் சேர்க்கும் நாண் 'α' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடாகும்.

எனவே, சமன்பாடு (2)-இல், $\beta=\alpha$ எனப்பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \sec 0\cos(\theta-\alpha)$$

$$= e\cos\theta + \cos(\theta-\alpha).$$

$\therefore$ 'α' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\alpha).$$

கிளை : $\frac{l}{r} = 1 + e \operatorname{sos}(\theta-\gamma)$ கூம்பு வளைவுக்கு α புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos(\theta-\gamma) + \cos(\theta-\alpha).$$

10·15. தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி

கூம்பு வளைவு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$

$P(\alpha)$ புள்ளியிடத்துத் தொடு கோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

$Q(\beta)$ புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\beta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-இன் தீர்வுகள் இரு தொடு கோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகளாம்.

(2)-இலிருந்து (3)-ஐக் கழிப்பின்,

$$\cos(\theta-\alpha) = \cos(\theta-\beta)$$

$$\therefore \quad \theta-\alpha = \pm(\theta-\beta).$$

$\theta-\alpha = \theta-\beta$ எனின்,

$$\alpha = \beta \text{ ஆனுல், } \alpha \neq \beta.$$

$$\therefore \quad \theta-\alpha = -(\theta-\beta)$$

(அ - து) $2\theta = \alpha+\beta$ (அ-து) $\theta = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

θ-வின் மதிப்பை (2) இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r} = e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)$$

$$= e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\therefore\ r = \frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

கிளை : தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி R எனவும், குவியம் S எனவும் கொண்டால், SR கோடு $\llcorner PSQ$-ஐ இரு சமக் கூறிடும்.

10·16. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகள்

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு α புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

தொடு புள்ளி 'α' கூம்பு வளைவின்மீது கந்தழியிலிருக்கு மெனின், சமன்பாடு (1) தொலைத் தொடு கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad 1 + e\cos\alpha = 0 \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து 'α'-ஐ நீக்க, தொலைத் கோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கப் பெறும்.

(2)-இலிருந்து $\cos\alpha = -\frac{1}{e}$. $\therefore\ \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$.

α-வின் மதிப்பை (1)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos\left[\theta - \cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)\right].$$

$\cos^{-1}\left(-\frac{1}{e}\right)$-க்கு 0, 2π என்ற கோண இடைவெளியில் இரு மதிப்புக்கள் உள்ளதால், இரு தொலைத் தொடுகோடுகள் உண்டு.

10·17. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு 'α' புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு 'α' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

∴ தொடு கோட்டிற்குச் செங்குத்தாய்ச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{K}{r} = e\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

[பத்தி 7, கிளை 2]

(அ - து) $\frac{K}{r} = -e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$

இக்கோடு 'α' புள்ளி வழிச் செல்கிறது.

(அ - து) $\left(\frac{l}{1+\cos\alpha}, \alpha\right)$ புள்ளி வழிச் செல்லும்.

$$\therefore \quad \frac{K(1 + e\cos\theta)}{l} = -e\sin\alpha - \sin(\alpha - \alpha)$$

$$\therefore \quad K = -\frac{le\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha}.$$

K-இன் மதிப்பை (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$-\frac{le\sin\alpha}{r(1+e\cos\alpha)} = -e\sin\theta - \sin(\theta - \alpha).$$

(அ - து) $\frac{l}{r} \cdot \frac{e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha).$

எனவே, 'α' புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு

$$\frac{e\sin\alpha}{1 + e\cos\alpha} \cdot \frac{l}{r} = e\sin\theta + \sin(\theta - \alpha).$$

10·18. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் (Director Circle)

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு 'α' புள்ளியிடத்துத்

தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

'β' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இவ்விரு தொடுகோடுகளும் வெட்டும் புள்ளி (r_1, θ_1) எனின்,

$$r_1 = \frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

[பத்தி 15-சமன்பாடுகள் (4), (5)]

சமன்பாடு (1)-ஐப் பின்வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha$$

(அ-து) $(e + \cos\alpha)\cos\theta + \sin\theta\sin\alpha - \frac{l}{r} = 0.$

எனவே, தொடுகோடு (1)-இன் சரிவு

$$= -\frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

இவ்வாறே தொடுகோடு (2)-இன் சரிவு

$$= -\frac{e + \cos\beta}{\sin\beta}$$

தொடுகோடுகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின், வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு, வழிகுத்துத் தொடுகோடு வட்டமாகும்.

எனவே, தொடுகோடுகள் (1), (2) தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின்,

$$\left(-\frac{e + \cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(-\frac{e + \cos\beta}{\sin\beta}\right) = -1.$$

$$\therefore \quad \left(\frac{e+\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{e+\cos\beta}{\sin\beta}\right) = -1$$

(அ - து) $(e+\cos\alpha)(e+\cos\beta)+\sin\alpha\sin\beta = 0$

$$\therefore \quad e^2+e(\cos\alpha+\cos\beta)+(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) = 0$$

(அ - து) $e^2+e\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$+\cos(\alpha-\beta) = 0.$

$$e^2+2e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\left(2\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}-1\right)=0$$

$$e^2+2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left[e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right]-1=0 \quad \ldots \quad (7)$$

சமன்பாடுகள் (3), (4), (7)-இலிருந்து α-ஐ நீக்க, குத்துத் தொடுகோடு வட்டம் கிடைக்கப் பெறும்.

சமன்பாடு (3)-இலிருந்து

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (8)$$

இதில் சமன்பாடு (4)-இன் $\frac{\alpha+\beta}{2} = \theta_1$-ஐப் பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1+\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\therefore \quad \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1 .$$

$\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ மதிப்புக்களை (7)-இல் பிரதியிடின்,

$$e^2+2\left[\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right]\left[e\cos\theta_1+\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right]-1=0$$

(அ-து) $e^2 + 2e \cos\theta_1 \left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)$
$$+ 2\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)^2 - 1 = 0.$$

$$\therefore \quad e^2r_1^2 + 2r_1 e\cos\theta_1 (l - r_1 e\cos\theta_1) + 2(l - er_1\cos\theta_1)^2 - r_1^2 = 0.$$

(அ-து) $e^2r_1^2 + 2r_1 el\cos\theta_1 - 2r_1e_2\cos^2\theta_1 + 2l^2 - 4ler_1\cos\theta_1 + 2e^2r_1^2\cos^2\theta_1 - r_1^2 = 0$

(அ-து) $e^2r_1^2 - 2ler_1\cos\theta_1 + 2l^2 - r_1^2 = 0.$

$$\therefore \quad r_1^2(e^2-1) - 2r_1 el\cos\theta_1 + 2l^2 = 0.$$

எனவே, குத்துத் தொடுகோடு வட்டத்தின் சமன்பாடு
$$r^2(e^2-1) - 2\,ler\cos\theta + 2l^2 = 0.$$

பரவளைவில் $e = 1$.

எனவே, அதன் குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்
$$-2lr\cos\theta + 2l^2 = 0$$

(அ-து) $\frac{l}{r} = \cos\theta.$

இது பரவளைவின் இயக்குவரையாகும்.

மாதிரி 9 : PP', QQ' என்பவை கூம்பு வளைவு ஒன்றின் குவிய நாண்களாம், இவைகள் தம்முள் செங்குத்தாய் வெட்டுமெனின், $\frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'}$ = மாறிலி என நிறுவுக.

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

ஒரு கூம்பு வளைவு எனக் கொள்வோம்.

P புள்ளியின் ஆரைக்கோணம் α எனின், P', Q, Q' புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் முறையே $\alpha+\pi$, $\alpha+\frac{\pi}{2}$, $\alpha+\frac{3\pi}{2}$ ஆகும்.

குவியம் S எனின்,

$$SP = \frac{l}{1+e\cos\alpha}, \quad SP' = \frac{l}{1-e\cos\alpha}.$$

$$SQ = \frac{l}{1-e\sin\alpha}, \quad SQ' = \frac{l}{1+e\sin\alpha}.$$

$$\therefore\ PP' = SP+SP' = \frac{(l-el\cos\alpha)+(l+el\cos\alpha)}{1-e^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2l}{1-e^2\cos^2\alpha}.$$

$$QQ' = SQ+SQ' = \frac{2l}{1-e^2\sin^2\alpha}.$$

$$\therefore\ \frac{1}{PP'} + \frac{1}{QQ'} = \frac{1-e^2\cos^2\alpha}{2l} + \frac{1-e^2\sin^2\alpha}{2l}$$

$$= \frac{(1-e^2\cos^2\alpha)+(1-e^2\sin^2\alpha)}{2l}$$

$$= \frac{2-e^2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{2l} = \frac{2-e^2}{2l} = \text{மாறிலி.}$$

மாதிரி 10 : குவியத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்கும் ஒரு செவ்வக அதிபரவளைவின் நாண்கள் நிலைத்த பரவளைவு ஒன்றைத் தொடும் என நிறுவுக.

செவ்வக அதிபரவளைவின் சமன்பாடு

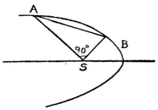
$$\frac{l}{r} = 1+\sqrt{2}\cos\theta. \qquad [\because\ e=\sqrt{2}].$$

நாண் AB குவியம் S-இல் தாங்கும் கோணம் 90° எனக் கொள்வோம்.

A, B புள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்கள் $(\alpha+\beta)$, $(\alpha-\beta)$ எனின்,

$$\angle ASB = (\alpha+\beta)-(\alpha-\beta) = 2\beta.$$

$$\angle ASB = 90^\circ \text{ எனின், } \beta = 45^\circ.$$



படம் 110

AB-யின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sqrt{2}\cos\theta + \sec\beta\cos(\theta-\alpha)$$

$$= \sqrt{2}\cos\theta + \sec 45\cos(\theta-\alpha)$$

$$= \sqrt{2}\cos\theta + \sqrt{2}\cos(\theta-\alpha).$$

$$\therefore \frac{l}{r\sqrt{2}} = \cos\theta + \cos(\theta-\alpha)$$

எனவே, *AB* என்ற கோடு $\frac{l}{r\sqrt{2}} = 1 + \cos\theta$ என்ற பர வளைவை 'α' புள்ளியில் தொடும்.

மாதிரி 11 : $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ எனும் கோடு $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ எனும் கூம்பு வளைவைத் தொடுவதற்குத் தேவையான கட்டுப்பாடு $(A-e)^2 + B^2 = 1$ என நிறுவுக.

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ என்ற கூம்பு வளைவுக்குத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta-\alpha)$$

$$= e\cos\theta + \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha.$$

$$\therefore \quad \frac{l}{r} = (e + \cos\alpha)\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

தொடு கோடெனின், சமன்பாடுகள் (1), (2) ஒரே கோட்டைக் குறிக்கும்.

$$\therefore \quad 1 = \frac{e + \cos\alpha}{A} = \frac{\sin\alpha}{B}$$

(அ-து) $A = e + \cos\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$

$B = \sin\alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$

சமன்பாடுகள் (3), (4)-இலிருந்து α-ஐ நீக்கினால் தேவையான கட்டுப்பாடு கிடைக்கும்.

(3)-இலிருந்து $\cos\alpha = A - e$.

$$\therefore \quad 1 = \cos^2 + \sin^2\alpha = (A - e)^2 + B^2.$$

எனவே, தேவையான கட்டுப்பாடு

$$(A - e)^2 + B^2 = 1.$$

10·19. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு (r_1, θ_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகளின் தொடுநாண்

$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ எனும் கூம்பு வளைவுக்கு (r_1, θ_1) புள்ளியிலிருந்து வரையும் தொடுகோடுகள் கூம்பு வளைவைத் தொடும் புள்ளிகள் Q, R எனவும், இப் புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்களின் α, β எனவும் கொள்வோம்.

$\therefore$ நாண் Q, R-இன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sec\frac{\alpha - \beta}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) + e\cos\theta \quad \ldots \quad (1)$$

'α', 'β' புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha).$$

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta).$$

இத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகள்

$$\left(\frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}},\ \frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}. \qquad \ldots \qquad (2)$$

$$\theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (3)$$

(2)-இலிருந்து, $\dfrac{l}{r_1} = e\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$

(அ-து) $\dfrac{l}{r_1} - e\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} = \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

(3)-இலிருந்து $\theta_1 = \dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

எனவே, சமன்பாடு (1),

$$\frac{l}{r} = \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + e\cos\theta$$

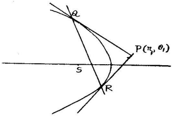
$$= \frac{\cos(\theta-\theta_1)}{\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1} + e\cos\theta$$

(அ-து) $\dfrac{l}{r} - e\cos\theta = \dfrac{\cos(\theta=\theta_1)}{\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1}$.

$$\therefore \quad \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1).$$

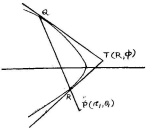
எனவே, தொடுநாணின் சமன்பாடு

$$\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right) = \cos(\theta - \theta_1).$$



படம் 111.

10·20. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவைச் சார்ந்து (r_1, θ_1) புள்ளியின் இசைக்கோடு



படம் 112.

$P(r_1, \theta_1)$ என்ற குறித்த புள்ளி வழிச் செல்லும் நாண்களில் ஒன்று QR எனக் கொள்வோம். Q, R புள்ளிகளிடத்து வரையும் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளி $T(R, \phi)$ எனின், T-யின் இயங்கு வழி P-யின் இசைக் கோடாகும்.

Q, R புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் முறையே α, β எனின், T புள்ளியின் கூறுகள்

$$R = \frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots \quad (1)$$

$$\phi = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

நாண் QR-இன் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + e\cos\theta.$$

இது $P(r_1, \theta_1)$ வழிச் செல்லின்,

$$\frac{l}{r_1} = \sec\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\theta_1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + e\cos\theta_1$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1 = \frac{\cos\left(\theta_1 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (1), (2)-இலிருந்து

$$R = \frac{l}{e\cos\phi + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$(\text{அ-து}) \quad \frac{l}{R} = e\cos\phi + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

$$\frac{l}{R} - e\cos\phi = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(2)-இலிருந்து ϕ-யின் மதிப்பையும், (4)-இலிருந்து $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ மதிப்பையும் (3)-இல் பிரதியிடின்,

$$\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1=\frac{\cos(\theta_1-\phi)}{\left(\frac{l}{R}-e\cos\phi\right)}.$$

$$\therefore\ \left(\frac{l}{r}-e\cos\theta_1\right)\left(\frac{l}{R}-e\cos\phi\right)=\cos(\theta_1-\phi).$$

எனவே, (R,ϕ)-யின் இயங்குவழி, அதாவது $P(r_1,\theta_1)$-இன் இசைக்கோடு

$$\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)=\cos(\theta-\theta_1).$$

10·21. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் துணை வட்டம்

கூம்பு வளைவின் தொடுகோட்டிற்குக் குவியத்திலிருந்து வரையும் செங்குத்துக்கோட்டின் அடிப்புள்ளியின் இயங்குவழி கூம்பு வளைவின் துணைவட்டமாகும் (auxilary circle).

கூம்பு வளைவு $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ ... ... (1)

தொடுகோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r}=e\cos\theta+\cos(\theta-\alpha)\quad\dots\quad(2)$$

தொடுகோட்டிற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{K}{r}=e\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta-\alpha\right)$$

$$=-e\sin\theta-\sin(\theta-\alpha).$$

(அ-து) $K=-re\sin\theta-r\sin(\theta-\alpha)$.

இது குவியம் (முனைவு) வழிச் செல்லின்,

$K=0$.

எனவே, முனைவு வழிச் செல்லும் செங்குத்துக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$\sin(\theta-\alpha)=-e\sin\theta\quad\dots\quad\dots\quad\dots\quad(3)$$

(2)-இலிருந்து, $\frac{l}{r} - e\cos\theta = \cos(\theta - \alpha)$ ... (4)

சமன்பாடுகள் (3), (4)-ஐ வர்க்கப் படுத்திக் கூட்ட,

$$e^2\sin^2\theta + \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 = \sin^2(\theta-\alpha) + \cos^2(\theta-\alpha) = 1$$

(அ-து) $e^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - \frac{2le}{r}\cos\theta + \frac{l^2}{r^2} - 1 = 0.$

$\therefore \quad r^2e^2 - 2ler\cos\theta + l^2 - r^2 = 0.$

$\therefore \quad r^2(e^2 - 1) - 2ler\cos\theta + l^2 = 0.$

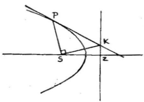
எனவே, துணை வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r^2(e^2 - 1) - 2rle\cos\theta + l^2 = 0.$$

பரவளைவில் $e = 1$. எனவே, அதன் துணை வட்டம் $-2rl\cos\theta + l^2 = 0$ (அ-து) $\frac{l}{r} = 2\cos\theta$.

இது பரவளைவுக்கு முனையிடத்துத் தொடு கோடாகும்.

10·22. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு இயக்குவரையை K புள்ளியில் வெட்டினால் $\angle KSP$ ஒரு செங்கோணமாம்



படம் 118.

முனைவு S எனவும், தொடக்கக் கோடு SZ, இயக்கு வரை KZ எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியின் கோண தூரக் கூறுகள் (r_1, θ_1) எனின், $SP = r_1$, $\angle ZSP = \theta_1$.

P புள்ளியிடத்துத் தொடு கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \theta_1) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

இயக்குவரையின் சமன்பாடு $\frac{l}{r} = e\cos\theta \quad \ldots \quad (2)$

இயக்கு வரையும் தொடுகோடும் வெட்டும் புள்ளி K எனில், K-யின் கோண தூரக் கூறுகள், சமன்பாடுகள் (1), (2)-இன் தீர்வுகளாகும்.

சமன்பாடுகள் (1) (2)-இலிருந்து

$$\cos(\theta - \theta_1) = 0$$

$$\therefore \quad \theta - \theta_1 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

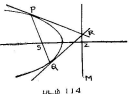
எனவே, K புள்ளியின் ஆரைக்கோணம் $\theta_1 \pm \frac{\pi}{2}$.

$$\angle KSP = ZSP - \angle ZSK$$

$$= \theta_1 - \left(\theta_1 \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \pm\frac{\pi}{2}.$$

10·23. குவிய நாண்களின் நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் தம் வெட்டும் புள்ளிகளின் இயங்குவழி ஒத்த இயக்கு வரையாகும்



படம் 114

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

குவியம் (அ-து) முனைவு S, தொடக்கக் கோடு SZ, ஒத்த இயக்கு வரை ZM எனக் கொள்வோம்.

PQ ஒரு குவிய நாண் எனவும், P, Q புள்ளிகளின் ஆரைக் கோணங்கள் α, β எனவும் கொள்வோம்.

P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

Q புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \beta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

கோடுகள் (2), (3) வெட்டும் புள்ளி $R(r_1, \theta_1)$ எனின்,

$$r_1 = \frac{l}{e\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

[பத்தி 15-சமன்பாடுகள் (4), (5)].

$$\theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (5)$$

P, Q புள்ளிகள் குவியநாணின் நுனிகளாதலின், P-யின் ஆரைக்கோணம் α எனின், Q-வின் ஆரைக்கோணம் $(\pi+\alpha)$ ஆகும்.

$$\therefore \ \beta = \pi + \alpha \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (6)$$

(4)-இலிருந்து, $\dfrac{l}{r_1} = e\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$.

$$= e\cos\theta_1 + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \quad \left[\because \ \theta_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

$$= e\cos\theta_1 + \cos\frac{\alpha-(\pi+\alpha)}{2}$$

$$= e\cos\theta_1 + \cos\frac{\pi}{2}$$

$$= e\cos\theta_1.$$

$\therefore$ (r_1, θ_1)-இன் இயங்குவழி, $\frac{l}{r} = e\cos\theta$.

இஃது இயக்கு வரையின் சமன்பாடாதலின், R புள்ளியின் இயங்குவழி ஒத்த இயக்கு வரையாகும்

10·24. $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ பரவளைவில், P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் R புள்ளியில் வெட்டினால், $SR^2 = SP.SQ$.

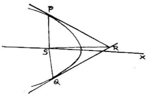
P, Q புள்ளிகளின் ஆரைக்கோணங்கள் α, β எனின், இப் புள்ளிகளின் கோணதூரக் கூறுகள்

$$P(SP, \alpha), \quad Q(SQ, \beta).$$

$\therefore$ P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள்

$$\frac{l}{r} = \cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \ldots \quad \ldots \quad (1)$$

$$\frac{l}{r} = \cos\theta + \cos(\theta - \beta) \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$



படம் 115.

தொடு கோடுகள் (1), (2) வெட்டும் புள்ளி $R(r_1, \theta_1)$ எனின்,

$$r_1 = SR = \frac{l}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} \quad \ldots \quad (3)$$

$$\theta_1 = \angle XSR = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \dots \quad \dots \quad (4)$$

R புள்ளி P புள்ளியிடத்துத் தொடுகோட்டின் மீதமைவதால்,

$$\frac{l}{r_1} = \cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha)$$

$$\therefore \quad \frac{l}{SR} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (5)$$

மேலும், P, Q புள்ளிகள் கூம்பு வளைவின் மீதமைவதால்,

$$\frac{l}{SP} = 1 + \cos\alpha \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (6)$$

$$\frac{l}{SQ} = 1 + \cos\beta \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (7)$$

$$\therefore \quad \frac{l^2}{SP.SQ} = (1+\cos\alpha)(1+\cos\beta)$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} . 2\cos^2\frac{\beta}{2} = 4\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}.$$

$$= \frac{l^2}{SR^2}.$$

$$\therefore \quad SP.SQ = SR^2.$$

10·25. **(r_1, θ_1) புள்ளியிலிருந்து $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு வரையும் இரட்டைத் தொடுகோடுகள்**

$$\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta. \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad (1)$$

என்ற கூம்பு வளைவுக்கு 'α' புள்ளியிடத்துத் தொடுகோடு

$$\frac{l}{r} = e\cos\theta + \cos(\theta - \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad (2)$$

இது (r_1, θ_1) புள்ளி வழிச் செல்லின்,

$$\frac{l}{r_1} = e\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - \alpha) \quad \dots \quad \dots \quad (3)$$

சமன்பாடுகள் (2), (3)-இலிருந்து 'α'-ஐ நீக்கினால், இரட்டைத் தொடுகோடுகளின் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

சமன்பாடுகள் (2), (3)-ஐப் பின் வருமாறு மாற்றி எழுதலாம்.

$$\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta - \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right) = 0.$$

$$\cos\alpha\cos\theta_1 + \sin\alpha\sin\theta_1 - \frac{l}{r_1} - e\cos{}_1\theta = 0.$$

குறுக்குப் பெருக்கல் விதிப்படி (rule of cross multiplication)

$$\cos\alpha = \frac{\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\sin\theta_1 - \left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)\sin\theta}{\sin(\theta - \theta_1)}.$$

$$\sin\alpha = \frac{\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)\cos\theta - \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\cos\theta_1}{\sin(\theta - \theta_1)}.$$

இவ்விரண்டையும் வர்க்கப்படுத்திக் கூட்ட,

$$\sin^2(\theta - \theta_1) = \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2(\sin^2\theta_1 + \cos^2\theta_1)$$

$$+ \left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) - 2\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)$$

$$\times \left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)(\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1$$

(அ-து) $\sin^2(\theta - \theta_1) = \left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)^2 + \left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)^2$

$$- 2\left(\frac{l}{r} - e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1\right)\cos(\theta - \theta_1).$$

$$X = \frac{l}{r} - e\cos\theta, \quad Y = \frac{l}{r_1} - e\cos\theta_1 \text{ எனின்,}$$

$$\sin^2(\theta-\theta_1) = X^2+Y^2-2XY\cos(\theta-\theta_1).$$

$$1-\cos^2(\theta-\theta_1) = X^2+Y^2-2XY\cos(\theta-\theta_1).$$

$$1-X^2-Y^2 = \cos^2(\theta-\theta_1)-2XY\cos(\theta-\theta_1).$$

இரு புறமும் X^2Y^2-ஐக் கூட்டின்,

$$1-X^2-Y^2+X^2Y^2 = X^2Y^2-2XY\cos(\theta-\theta_1) + \cos^2(\theta-\theta_1).$$

$$\therefore \quad (X^2-1)(Y^2-1) = [XY-\cos(\theta-\theta_1)]^2$$

(அ-து) $$\left[\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)^2-1\right]\left[\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)^2-1\right]$$

$$= \left[\left(\frac{l}{r}-e\cos\theta\right)\left(\frac{l}{r_1}-e\cos\theta_1\right)-\cos(\theta-\theta_1)\right]^2.$$

மாதிரி 12 : $\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் குவியம் வழிச் செல்லும் ஒரு வட்டம் கூம்பு வளைவை நான்கு புள்ளிகளில் வெட்டுகிறது. அப்புள்ளிகளின் தூரம் குவியத்திலிருந்து r_1, r_2, r_3, r_4 எனின்,

$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\frac{1}{r_4} = \frac{2}{l} \text{ என நிறுவுக.}$$

கூம்பு வளைவின் சமன்பாடு

$$\frac{l}{r} = 1+e\cos\theta \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (1)$$

வட்டத்தின் விட்டம் a எனவும், விட்டம் தொடக்கக் கோட்டுடன் பிறப்பிக்கும் கோணம் ϕ எனவும் கொண்டால், வட்டத்தின் சமன்பாடு

$$r = a\cos(\theta-\phi) \qquad \ldots \qquad \ldots \qquad (2)$$

சமன்பாடு (1)-இலிருந்து $\frac{l-r}{er} = \cos\theta.$

$$\therefore \quad \sin\theta = \sqrt{1-\left(\frac{l-r}{er}\right)^2}$$

இதைச் சமன்பாடு (2)-இல் பிரதியிடின்,

$$r = a\cos(\theta - \phi)$$

$$= a(\cos\theta \cos\phi + \sin\theta \sin\phi)$$

$$= a\left[\frac{l-r}{er}\cos\phi + \sqrt{1 - \frac{(l-r)^2}{e^2r^2}}\sin\phi\right]$$

(அ-து) $e^2r^4 + 2ae\cos\phi\, r^3 + (a^2 - 2ael\cos\phi - a^2e^2\sin^2\phi)r^2 - 2la^2r + a^2l^2 = 0.$

இதன் மூலங்கள் r_1, r_2, r_3, r_4 ஆகும்.

$$\therefore \quad S_3 = r_1r_2r_3 + r_2r_3r_4 + r_3r_4r_1 + r_1r_2r_4$$

$$= \frac{2la^2}{e^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (3)$$

$$S_4 = r_1r_2r_3r_4 = \frac{a^2l^2}{e^2} \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad (4)$$

(3)-இன் இரு பக்கமும் $r_1r_2r_3r_4$-ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2la^2}{e^2} \cdot \frac{1}{r_1r_2r_3r_4}$$

$$= \frac{2la^2}{e^2} \cdot \frac{e^2}{a^2l^2}$$

$$= \frac{2}{l}.$$

$$\therefore \quad \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = \frac{2}{l}.$$

பயிற்சி 10.2.

1. $\left(4, \frac{\pi}{3}\right)$, $\left(-20, \frac{2\pi}{3}\right)$ என்னும் புள்ளிகள் $\frac{10}{r} = 1 + 3\cos\theta$ என்ற அதிபரவளைவின் மீதுள்ளன என நிறுவுக.

2. $\frac{l}{r}=1-e\cos\theta,\ \frac{l}{r}=-e\cos\theta-1$ என்ற சமன்பாடு கள் ஒரே கூம்பு வளைவைக் குறிக்கும் என நிறுவுக.

3. PSP', QSQ' என்பவை குவிய நாண்கள். இவை தம்முள் செங்குத்தாக வெட்டினால் $\frac{1}{SP \cdot SP'}+\frac{1}{SQ \cdot SQ'}$ ஒரு மாறிலி என நிறுவுக.

4. கூம்பு வளைவின் PQ நாண் குவியம் S-இல் ஏற்கும் கோணம் 2ϕ (மாறிலி) எனின், P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் வெட்டும் புள்ளியின் இயங்கு வழி S-ஐ குவியமாகக் கொண்ட மற்றொரு கூம்பு வளைவு என நிறுவுக.

5. 2α, 2β என்பவை $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ குறிக்கும் கூம்பு வளைவின் விட்டத்தினது நுனிகளின் ஆரைக்கோணங் களெனின், $\tan\alpha \cdot \tan B=\frac{e+1}{e-1}$ என நிறுவுக.

6. $\frac{l}{r}=1-e\cos(\theta-\gamma)$ கூம்பு வளைவின் தொலைத் தொடு கோடுகளைக் காண்க.

7. $\frac{l}{r}=1+e\cos\theta$ கூம்பு வளைவுக்கு α, β, γ புள்ளி களிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திக்கு மெனின்,

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}+\tan\frac{\gamma}{2}=0 \text{ என நிறுவுக.}$$

8. கூம்பு வளைவின் குவிய நாண்கள்தம் நடுப்புள்ளிகளின் இயங்குவழி மற்றொரு கூம்பு வளைவு என நிறுவுக.

9. $\frac{l_1}{r}=1-e_1\cos\theta,\ \frac{l_2}{r}=1-e_2\cos(\theta-\phi)$ கூம்பு வளைவுகள் ஒன்றையொன்று தொடுமெனின்,

$$l_1^2(1-e_1^2)+l_2^2(1-e_2^2)=2l_1l_2(1-e_1e_2\cos\phi)$$

என நிறுவுக.

10. பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள் இரண்டின் பொது நாண்களிலிரண்டு, கூம்பு வளைகளின் இயக்குவரைகள் வெட்டும் புள்ளி வழிச் செல்லும் என நிறுவுக.

11. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவில் நாண் AB குவியத்தில் செங்கோணத்தை ஏற்குமெனின்,

$$\left(\frac{1}{SA} - \frac{1}{l}\right)^2 + \left(\frac{1}{SB} - \frac{1}{l}\right)^2 = \frac{e^2}{l^2}$$ என நிறுவுக.

12. ஒரு நீள் வட்டத்தின் பேரச்சுடன் அதன் குவிய நாண் பிறப்பிக்கும் கோணம் α எனின், அந்நாணின் நுனிகளிடத்துத் தொடுகோடுகளின் இடைப்பட்டக் கோணம் $\tan^{-1}\left(\frac{2e\sin\alpha}{1-e^2}\right)$ என நிறுவுக.

13. ஒரு கூம்பு வளைவை ϕ புள்ளியிடத்துத் தொடும் வட்டம் குவியம் வழிச்செல்லின், அவ்வட்டத்தின் சமன்பாடு $r(1-e\cos\phi)^2 = l\cos(\theta-\phi) - el\cos(\theta-2\phi)$ என நிறுவுக.

14. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவில் α, β, γ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திப்பின், $2\theta_1 = \alpha + \beta + \gamma$ என நிறுவுக.

15. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவில் $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ புள்ளிகளிடத்துச் செங்கோடுகள் (r_1, θ_1) புள்ளியில் சந்திப்பின் $\alpha + \beta + \gamma + \delta - 2\theta_1 = (2n+1)\pi$ என நிறுவுக.

16. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவில் P, Q புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் R-இல் சந்திக்கும். நாண் PQ இயக்குவரையை M-இல் சந்திப்பின் $\angle MSR = 90^\circ$ என நிறுவுக.

17. $\frac{l}{r} = A\cos\theta + B\sin\theta$ என்ற கோடு $\frac{l}{r} = 1 - e\cos(\theta - \alpha)$ கூம்பு வளைவின் தொடுகோடெனின், $A^2 + B^2 - 2e(A\cos\alpha + B\sin\alpha) + e^2 - 1 = 0$ என நிறுவுக.

18. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் குவியத்திலிருந்து அதன் தொடு கோட்டிற்கு வரையும் செங்குத்துக் கோடுகளின் அடிப் புள்ளிகளின் இயங்கு வழி $r^2(1 - e^2) + 2ler\cos\theta - e^2 = 0$ என நிறுவுக.

19. $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் நாண் PQ குவியத்தில் ஏற்கும் கோணம் 2β. PSQ கோணத்தின் உள்ளிரு சமவெட்டி நாண் PQ-ஐ R-இல் சந்திக்குமெனின், R-இன் இயங்கு வழி $\frac{l\cos\beta}{r} = 1 + e\cos\beta\cos\theta$ என நிறுவுக.

20. $\frac{l}{r} = 1 + \cos\theta$ பரவளைவின் மீதுள்ள A, B, C புள்ளிகளிடத்துத் தொடுகோடுகள் $A'B'C'$ என்ற முக்கோணத்தை அமைக்குமெனின்,

$$SA.SB.SC = SA'.SB'.SC'$$ என நிறுவுக.

21. LSL' என்பது $\frac{l}{r} = 1 + e\cos\theta$ கூம்பு வளைவின் செவ்வகலம். L புள்ளியிடத்துச் செங்கோடு கூம்பு வளைவை மறுபடியும் M புள்ளியில் சந்திப்பின்,

$1 + 3e^2 + e^4 = (1 + e^2 - e^4)SM$ என நிறுவுக.

22. PSP', $PS'Q$ என்பவை குவிய நாண்களெனின், $\frac{SP}{SP'} + \frac{S'P}{S'Q}$-வின் மதிப்பு P புள்ளியின் நிலையைச் சாராது என நிறுவுக.

விடைகள்

6. $\frac{l}{r} = \left(e - \frac{1}{e}\right)\left[\cos(180 - \theta + \gamma) \pm \frac{\sin(\theta - \gamma)}{\sqrt{e^2 - 1}}\right]$.

கலைச் சொற்கள்

A

Anticlockwise	—	இடஞ்சுழியாக
Arithmetic progression	—	கூட்டு விருத்தி
Asymptote	—	தொலைத் தொடுகோடு
Axes of transformation	—	அச்சு நிலை மாற்றம்
Axis	—	அச்சு, ஆயம்

B

Bisector	—	சமவெட்டி
external bisector	—	வெளியிரு சமவெட்டி
internal bisector	—	உள்ளிரு சமவெட்டி
perpendicular bisector	—	மையக்குத்துக் கோடு

C

Centre	—	மையம்
external centre of similitude	—	வெளி வடிவொப்ப மையம்
internal centre of similitude	—	உள் வடிவொப்ப மையம்
Chord	—	நாண்
Circle	—	வட்டம்
auxilary circle	—	துணை வட்டம்
circle of similitude	—	வடிவொப்ப வட்டம்
coaxal circles	—	பொது அச்சு வட்டங்கள்
director circle	—	குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்
orthogonal system of circles	—	ஒரு நிலை செங்குத்து வட்டங்கள்
orthogonal system of coaxal circles	—	பொது அச்சு ஒரு நிலை குத்து வட்டங்கள்
system of circles	—	ஒரு நிலை வட்டங்கள்

Cirrcumference — பரிதி
Conic — கூம்பு வளைவு
  central conic — மையக் கூம்பு வளைவு
  confocal conic — பொதுக்குவியக் கூம்பு வளைவுகள்
Conjugate lines — துணையியக் கோடுகள்
Conjugate points — துணையியப் புள்ளிகள்
Constant — மாறிலி
Contact — தொடுகை
  contact of first order — முதல் வரிசைத் தொடுகை
  contact of second order — இரண்டாம் வரிசைத் தொடுகை
  contact of third order — மூன்றும் வரிசைத் தொடுகை
Coordinates — அச்சுத் தூரங்கள், ஆயத் தொலைகள்
  cartesian coordinates — தேக்காட்டின் கூறுகள்
Curve — வளைவரை

D

Diagonal — மூலை விட்டம்
Diameter — விட்டம்
Directrix — இயக்கு வரை
Director circle — குத்துத் தொடுகோடு வட்டம்
Discriminate — தன்மைக் காட்டி

E

Eccentric angle — துணை வட்டக்கோணம்
Eccentricity — மையத் தொலை விகிதம்
Ellipse — நீள் வட்டம்
Equation — சமன்பாடு
Equi-conjugate diameter — துணையியச் சம விட்டங்கள்

F

Fixed line — நிலையான கோடு
Fixed point — நிலைத்த புள்ளி
Focal chord — குவிய நாண்
Focal distance — குவியத் தூரம்
Focus — குவியம்
Function — சார்பு

G

Geometric progression — பெருக்கு விருத்தி
Geometry — வடிவ கணிதம்
coordinate geometry — ஆயத் தொலை வடிவ கணிதம்

H

Homogeneous — சமபடித்தான
Hyperbola — அதிபரவளைவு
Hypotenuse — கர்ணம்

I

Incentre — உள்வட்டமையம்
Independant — சார்பிலா
Infinity — கந்தழி
Intercept — வெட்டுத் துண்டு

L

Latus rectum — செவ்வகலம்
Locus — இயங்கு வழி

M

Major axis — பேரச்சு
Maximum — மீப்பெரு
Minimum — மீச்சிறு
Minor axis — சிற்றச்சு

N

Normal — செங்கோடு
Normal form — செங்குத்து வடிவம்
Notation — குறியீடு

O

Ordinate — குத்தாயம்
Origin — ஆதி
Orthocentre — குத்துக் கோட்டுச் சந்தி, செங்குத்து மையம்

P

Parabola — பரவளைவு
Parallel — இணையான
Parameter — துணையலகு
Point — புள்ளி
  limiting points — எல்லைப் புள்ளிகள்
  point circle — புள்ளி வட்டம்
Polar — இசைக் கோடு
Polar coordinates — கோண தூரக் கூறுகள்
Polar equations — கோண தூர சமன்பாடுகள்
Pole — இசைப்புள்ளி, முனைவு

R

Radical axis — சமத்தொடு அச்சு
Radical centre — சமத்தொடு வரை மையம்
Radius — ஆரம்
Rectangular hyperbola — செவ்வக அதிபரவளைவு

S

Semi—diameter — அரை விட்டம்
Sign — குறி
  negative sign — எதிர்க்குறி, குறைக்குறி
  positive sign — நேர்க்குறி, மிகைக்குறி
Slope — சரிவு
Straight line — நேர்க் கோடு
Subnormal — செங்கோட்டடி
Subtangent — தொடுகோட்டடி
Symmetric — சமச்சீர்

T

Tangent — தொடுகோடு
  direct common tangent — நேர்ப் பொதுத் தொடுகோடு
  transverse common tangent — குறுக்குப் பொதுத் தொடு கோடு
Trapezium — சரிவகம்
Triangle — முக்கோணம்

U

Uniform	— ஒரு சீரான
Uniquely	— ஒரே முறையில்
Unit	— அலகு

V

Value	— மதிப்பு
real value	— உண்மை மதிப்பு, மெய்யான மதிப்பு
Variable	— மாறி
Vertex	— முனை, உச்சி

X

X—axis	— x அச்சு, x ஆயம்

Y

Y-axis	— y அச்சு, y ஆயம்

Z

Zero	— பூச்சியம்
Zone	— மண்டலம்

தமிழ்நாட்டுப் பாடநூல் நிறுவனம்

சென்னை

1971 ஜூலைவரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

No.	பொருளாதாரம்		ஆசிரியர்		ரூ.	பை.
*1.	பொருளாதாரம்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	50
*1-A	,, II	...	,,	...	9	00
*2.	சோவியத் பொருளாதார வளர்ச்சி	...	டாக்டர் எம். ஜே. கே. தவராஜ்	...	4	25
*3.	அமெரிக்கப் பொருளாதாரம்	...	,,	...	4	50
*4.	பொருளாதாரச் சிந்தனை வரலாறு	...	சோணாசலம்	...	7	00
*5.	பன்னாட்டு வாணிபம்	...	மு. ஆரோக்கியசாமி	...	6	00
6.	புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள்	...	திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி	...	12	00
7.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்—I	...	தி. சி. மோகன்	...	12	00
8.	,, II	...	எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	...	10	75
9.	பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு	...	க. முத்தையன்	...	7	00
*10.	பணவியலும் பாங்கியலும்—I	...	சி. வேலாயுதம்	...	6	75
*11.	,, II	...	,,	...	11	50
12.	நவீன பாங்கு இயல்	...	க. வெற்றிவேல்	...	5	00
*13.	இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும்	...	பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன்	...	5	50
*14.	அரசாங்க நிதி இயல்	...	அர. சேஷாசலம்	...	4	75

*மூல நூல் (Original Book)

பொருளாதாரம்—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	பை
15.	இந்தியப் பொருளியல்—I	...	எம். பாலசுப்பிரமணியன்	10	00
16.	,, II	...	எம். லூர்துநாதன்	4	25
17.	நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை—I	...	சி. சுந்தரராஜன்	10	75
18.	,, II	...	எஸ். குழந்தைநாதன்	10	50
19.	இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு—I	...	கீ. சீ. இராமசாமி	6	00
20.	,, II	...	,,	6	00
21.	அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி	...	தி. சி. மோகன்	5	00
22.	அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு—I	...	மு. க. சுப்பிரமணியம்	11	00
23.	,, II	...	பி. வி. சீனிவாசன்	6	00
24.	,, III	...	,,	6	50
25.	அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்—I	...	மா. குமாரசாமி	10	00
26.	,, II	...	அர. சேஷாசலம்	9	50
27.	இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி—I	...	தே. வேலப்பன்	10	00
28.	,, II	...	ஜி. சிதம்பரம்	8	00
29.	பணம்—சிறு விளக்கம்	...	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	10	00
*30.	வணிக இயலின் தத்துவங்கள்	...	கு. ஆளுடையபிள்ளை	9	50
31.	பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில்-வாணிகப் புரட்சி	...	சு. ரா. கருப்பண்ணன்	11	00
32.	பென்ஹாம் பொருளாதாரம்—I	...	ஏ. குழந்தை	11	00
33.	,, II	...	எஸ். குழந்தைநாதன்	7	00
*34.	வரவு செலவுத் திட்டம்	...	ஆர். ரங்காச்சாரி	6	00

35.	பன்னாட்டுப் பொருளாதாரம்—I	ஏ. குழந்தை	7	50
36.	,, II	கே. எஸ். இராமசாமி	9	00
37.	பொருளாதார ஆய்வு நூல்—I	கோ. இராதாகிருஷ்ணன்	7	75
38.	,, II	,,	7	00
39.	வளர்ச்சியுறுத நாடுகளின் அரசாங்க நிதியியல்	க. வெற்றிவேல்	4	25
40.	வளர்ச்சி குறைந்த நாடுகளின் முதலாக்கம் பற்றிய சிக்கல்கள்	மா. குமாரசாமி	5	50
41.	1939 முதல் இந்தியாவில் பணவீக்க விலைப் போக்குகள்	சி. சுந்தரராஜன்	7	50
42.	பொருளாதார வளர்ச்சிபற்றிய கட்டுரைகள்	எம். கே. சுப்பிரமணியம்	7	75
43.	இந்தியப் பொருளாதார வரலாறு (1857-1956)—I	ம. திருநாவுக்கரசு	7	00
44.	பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்	பு. வி. சீனிவாசன்	6	25

வரலாறு

*45.	பிரிட்டன் வரலாறு—I	கி. ர. அனுமந்தன்	4	50
*46.	,, II	,,	3	50
*47.	,, III	,,	7	25
*48.	ஐரோப்பிய வரலாறு—I (கி.பி. 395—1500)	டி. வி. சொக்கப்பா	3	75
*49.	,, II (கி.பி. 1500 முதல்)	என். ஜே. இராஜகோபால்	5	50
50.	ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றாண்டுகாலச் சரித்திரம்	வை. விருத்தகிரீசன்	15	00
51	இங்கிலாந்து வரலாறு—I	இரா. அண்ணாமலை	13	00
52.	,, II	பா. மாணிக்கவேலு	13	00
53.	,, III	என். ஜே. ராஜகோபால்	8	00

*மூல நூல் (Original Book)

வரலாறு—(தொடர்ச்சி)

				ரூ.	பை
54.	இங்கிலாந்து வரலாறு—IV	...	என். ஜே. இராஜகோபால்	8	00
55.	இங்கிலாந்தின் வரலாறு—I	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	15	00
56.	,, II	...	எம். எக்ஸ். மிராண்டா	8	00
57.	,, III	...	,,	5	00
58.	இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு—I	...	தி. வெ. குப்புசாமி	5	00
59.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	6	00
60.	,, III	...	அ. பாண்டுரங்கன்	7	25
61.	கிரேக்க நாட்டு வரலாறு—I	...	சைமன் ஐ. எஸ். பாக்கியநாதன்	7	50
62.	,, II	...	,,	7	00
63.	,, III	...	பி. இராமாநுஜம் தேவதாஸ்	7	75
64.	ஆக்ஸ்ஃபோர்டின் இந்திய வரலாறு—I	...	தி. வெ. குப்புசாமி	8	25
65.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	7	50
66.	,, III	...	க. த. திருநாவுக்கரசு	10	50
67.	முகலாயப் பேரரசு—I	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப், எம். எக்ஸ். மிராண்டா	7	50
68.	,, II	...	எம். எக்ஸ். மிராண்டா, பா. மாணிக்கவேலு	7	75
69.	ஆங்கில அரசியலமைப்பின் வரலாறு—I	...	வை. விருத்தகிரீசன்	7	50
70.	,, II	...	வை. விருத்தகிரீசன், இரா. அண்ணாமலை	6	75
71.	,, III	...	இரா. அண்ணாமலை, பா. மாணிக்கவேலு	6	50
72.	,, IV	...	பா. மாணிக்கவேலு	7	00

73.	ஆங்கிலேயரின் சமுதாய வரலாறு—I	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன்	... 6	50
74.	,, II	...	சி. ஈ. இராமச்சந்திரன், இர. ஆலாலசுந்தரம்	... 6	75
75.	,, III	...	ஆர். ஆலாலசுந்தரம்	... 6	50
76.	இந்தியாவில் முகலாயரின் ஆட்சி—I	...	பா. மாணிக்கவேலு	... 5	00
77.	,, II	...	ஏ. உஸ்மான் ஷெரீப்	... 6	00

அரசியல்

*78.	அரசியல் அமைப்புகள்	...	ஜே. இராமச்சந்திரன்	... 4	62
*79.	அரசாங்கத்தின் வரலாறு	...	மோ. கிளாரன்சு, டி. டி. பெலிக்ஸ்	... 7	50
*80.	இந்திய அரசியலமைப்பு	...	வீ. கண்ணையா	... 4	75
81.	அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	...	டி. செல்லப்பா	... 8	50
82.	தற்கால அரசியல் அமைப்புகள்	...	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	... 8	50
83.	பன்னாட்டு அரசியல்—I	...	திருமதி நூர்ஜஹான் பாவா	... 16	00
84.	,, II	...	,,	... 13	25
85.	பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்—I	...	வீ. கண்ணையா	... 9	00
86.	,, II	...	அ. ஜெகதீசன்	... 7	25
87.	பொதுத்துறை ஆட்சியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	...	வீ. கண்ணையா	... 7	50
88.	,, II	...	டி. செல்லப்பா	... 7	50
89.	இந்திய அரசியலமைப்புத் திட்டம்	...	தி. வெ. குப்புசாமி, எஸ். சுப்பிரமணியன்	... 9	25
90.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—I	...	வீ. கண்ணையா	... 6	25
91.	,, II	...	வீ. கண்ணையா, கி. ர. அனுமந்தன்	... 5	75

*மூலநூல் (Original Book)

அரசியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை
92.	இந்திய ஆட்சி அமைப்புமுறை வளர்ச்சி—III	கி. ர. அனுமந்தன்	7	25
*93.	மக்கள் ஆட்சி	க. சந்தானம்	4	25
94.	1919 முதல் சர்வதேச உறவுகளும் உலக அரசியலும்—I	என். ஜே. ராஜகோபால்	7	75
95.	சமூக, அரசியல் கொள்கையின் அடிப்படைகள்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	7	00
96.	அரசியலமைப்புச் சட்ட ஆய்வுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	பா. சூரியநாராயணன்	5	75
97.	,, II	பா. சூரியநாராயணன், கி. ர. அனுமந்தன்	6	00
98.	,, III	கி. ர. அனுமந்தன்	5	75

உளவியல்

			ரூ.	பை
99.	குழந்தை உளவியல்—I	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	8	00
100.	,, II	,,	7	00
101.	உட்கவர் மனம்	சி. ந. வைத்தீஸ்வரன்	7	00
102.	இளையோர் உளவியல்—I	தி. இரா. அரங்கராசன்	12	00
103.	,, II	,,	9	00
104.	சமூக உளவியல்	என். வேதமணி மானுவேல்	9	25
105.	பிறழ்நிலை உளவியல்	அ. பெசன்ட். கிரிப்பர்ராஜ்	11	00
106.	பித்தரின் உள்ளம்	,,	3	00
*107.	குமர உள்ளம்	டாக்டர் மு. அறம்	6	25
*108.	உள நலவியல்	டாக்டர் தா. ஏ. சண்முகம்	6	00

தத்துவம்

109.	இந்து சமயத் தத்துவம்	ஞா. ராஜாபகதூர்	5	50
*110.	அறிவு ஆராய்ச்சி இயல்	ஆர். ராமானுஜாச்சாரி	3	50
*111.	மேலைநாட்டுத் தத்துவம்	ஆர். எஸ். தேசிகன்	3	50
112.	அத்துவித தத்துவம்	கோ. மோ. காந்தி	6	50
113.	ஆங்கிலேயப் பயன்வழிக் கொள்கையினர்	மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு	5	50
114.	இந்தியத் தத்துவம்—I	வ. அ. தேவசேனபதி, பா. நா. சண்முகசுந்தரம்	3	50
115.	,, —II	,,	6	00
116.	மெய்ப்பொருளியல்—ஓர் அறிமுகம்—I	சி. இராமலிங்கம்	6	00

அறவியல்

117.	அறவியல்—ஓர் அறிமுகம்	கோ. மோ. காந்தி	8	50

அளவையியல்

118.	அளவையியல்—தொடக்க நூல்	கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி	2	50

மானிடவியல்

*119.	மானிடவியல்	ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன்	4	75
120.	பண்பாட்டுக் கோலங்கள்	கி. பூ. சுப்பிரமணியம்	5	50
121.	இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை	எஸ். இலட்சுமி	3	50

சமூகவியல்

122.	சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள்	ஜே. நாராயணன்	10	50

*மூல நூல் (Original Book)

புவியியல்

*123.	ஆசியா—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	9	50
*124.	,, II	,,	8	75
*125.	ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல்	ஏ. எஸ். நாராயணன்	8	50
*126.	தென்கிழக்கு ஆசியா	ஜி. கிருஷ்ணமூர்த்தி	8	50
*127.	வட அமெரிக்கா	குமாரி இரா. அலமேலு	6	50
*128.	தென் அமெரிக்கா	எம். என். பத்மநாபன்	9	00
*129.	தென் கண்டங்கள்—ஆஸ்திரேலியா	திருமதி எச். நியூமன்	3	00
*130.	,, —ஆஃப்ரிக்கா	எஸ். முத்துக்கிருஷ்ணக் கரையாளர்	3	25
*131.	புவிப்புறவியல்—II	நா. அனந்தபத்மநாபன்	6	00
*132.	செய்முறைப் புவியியல்	சு. ஜெயச்சந்திரன்	5	50
*133.	மக்கட்பரப்பியல்	வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன்	4	75
*134.	சமுத்திரவியல்	கோ. இராமசாமி	6	50
135.	காலநிலை இயல்—I	கொ. சேஷ. நரசிம்மன்	10	00
136.	,, II	,,	5	00
*137.	காலநிலை இயல்—I	திருமதி இராதா	9	50
*138.	,, II	,,	8	00
139.	வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்	கோ. இராமசாமி	5	50
*140.	புவி அமைப்பு இயல்	சி. விஸ்வநாதன்	4	75
141.	பௌதிகப் புவியியலும் புவியமைப்பியலும்	கோ. இராமசாமி	6	00
142.	சிஷோரின் வாணிகப் புவியியல்—I	எஸ். மாணிக்கம்	9	50
143.	,, II	எம். கார்த்திகேயன்	12	00
144.	,, III	சி. எஸ். நரசிம்மன்	5	75

புள்ளியியல்

*145.	புள்ளியியல் —அறிமுகம்	சு. வைத்தியநாதன்	10	75
146.	புள்ளியியல் முறைகள் — I	கோ. சண்முகசுந்தரம்	10	00
147.	,, II	கே. ஆர். இராஜகோபாலன்	14	00
148.	நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம்	தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன்	6	50

உயர் கணிதம்

*149.	ஆயத்தொலை வடிவகணிதம்	டி. கே. மாணிக்கவாசகம் பிள்ளை	4	25
*150.	வகை நுண்கணிதம்	,,	3	00
*151.	தொகை நுண்கணிதம்	தி. கோவிந்தராசன்	3	25

விலங்கியல்

*152.	விலங்கியல்	பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன்	12	00

பௌதிகவியல்

153.	ஒளி நூல்	ச. சம்பத்து	10	00

விஞ்ஞானம்

*154.	வானவெளி வெற்றி	டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	6	00
*155.	ரேடியோ	டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம்	4	75
*156.	எக்ஸ்-கதிர்கள்	பெ. நா. அப்புசாமி, ஜே. பி. மாணிக்கம்	4	50
*157.	பாம்புகள்	பெ. மா. அண்ணாமலை	3	50
*158.	தாவரம்—வாழ்வும் வரலாறும்	டாக்டர் கு. சீனிவாசன்	8	00
*159.	கரும்பு	கு. பெரியசாமி	4	00
*160.	தாவரங்களின் வாழ்வியல்	எஸ். சுந்தரம்	6	50

*மூல நூல் (Original Book)

			ரூ.	பை
மருத்துவம்				
*161.	நீரிழிவு—க்ஷயரோகம்	டாக்டர் ஜி. வேங்கடசாமி, டாக்டர் ஏ. கதிரேசன்	2	50
162.	மகப்பேறும் மாதர்நோயும்	டாக்டர் (குமாரி) ந. மணிமேகலை	8	25
*163.	பாக்டீரியா	சு. சுந்தரம்	2	50
164.	புற்றுநோய்	அ. கதிரேசன்	3	50
165.	உடலியங்கியல்—I	டாக்டர்கள் ஜி. வேங்கடசாமி, டி. சரோஜினி, எஸ். கே. துரைராஜ், ஆர். சேது	6	75
166.	,, II	,,	5	50
167.	என்புருக்கி நோய்	டாக்டர் அ. கதிரேசன்	7	25
பொறியியல்				
168.	நீங்களே உங்கள் வீட்டைக் கட்டலாம்	கே. வி. கிருஷ்ணராஜ், சி. ஆர். சுப்பிரமணியம், ஆர். இராமசாமி, கே. வேணுகோபால்	8	50
கூட்டுறவு				
169.	உலகக் கூட்டுறவு இயக்கம்	அ. வேல்மணி	5	50
சட்டம்				
*170.	குற்றவியல் சட்டம்	எம். சண்முகசுப்பிரமணியம்	10	00
பொது நூல்கள்				
171.	மகாத்மா காந்தி	சரஸ்வதி தங்கையன்	3	25
172.	விவசாயப் புரட்சி	வி. கார்த்திகேயன்	8	00
173.	சேமக் கை-நூல்	ஆ. சுப்பிரமணியம்	2	50
*174.	முற்காலச் சோழர் கலையும் சிற்பமும்	எஸ். ஆர். பாலசுப்பிரமணியம்	9	00

●175.	உணவும் ஊட்டமும்	... தி. வேங்கடகிருஷ்ணய்யங்கார்	... 4 50
●176.	பள்ளி நிர்வாக அமைப்பு—அடிப்படைக் கருத்துகள்	எஸ். சந்தானம், எஸ். ஏ. துரைசிங்	... 6 25

புகுமுக (P.U.C.) வகுப்புகளுக்குரியவை

●177.	உலக வரலாறு	... டி. ஆர். இராமச்சந்திரன்	... 4 00
●178.	பொருளாதாரம்	... ஜி. சிதம்பரம்	... 2 75
●179.	வணிகவியலுக்கு ஓர் அறிமுகம்—I	... கு. ஆளுடையபிள்ளை	... 2 50
●180.	,, II	... ,,	... 2 25
●181.	பௌதிகம்	... டாக்டர் பி. திருஞானசம்பந்தம், ஆர். நாகராஜன்	... 7 50
●182.	புகுமுக பௌதிகம்	... டாக்டர் எம். ஏ. தங்கராஜ்	... 6 00
*183.	பௌதிகம்—ஓர் அறிமுகம்	... எஸ். சம்பத்	... 7 00
●184.	புகுமுக வகுப்புக் கணிதம்—I	... கே. ராஜகோபாலன்	... 7 00
●185.	,, II	... ,,	... 3 00
●186.	புகுமுக வகுப்புக் கணித நூல்—I	... டி. கோவிந்தராஜன், முத்துசாமி	... 7 00
●187.	,, II	... ,,	... 4 50
●188.	கணிதம்—ஓர் அறிமுகம்—I	... ஆர். மகாதேவன்	... 4 75
●189.	,, II	... ,,	... 3 25
●190.	வேதியியல்	... பி. டி. முனியப்பா, ஆர். முத்துலட்சுமி	... 7 00
●191.	புகுமுக வேதியியல்	... சி. ஏ. பத்மநாபன்	... 5 50
●192.	விலங்கியல்	... எஸ். ஆப்ரகாம்	... 4 00
●193.	புகுமுக விலங்கியல்	... பெ. மா. அண்ணாமலை	... 7 25
●194.	புகுமுக வகுப்புத் தாவரவியல்	எஸ். சுந்தரம்	... 4 00

*மூல நூல் (Original Book)

பட்டப்படிப்பிற்குரிய (பி.எஸ்ஸி.) நூல்கள்

(அடக்க விலைப் பதிப்புகள்-கழிவு இல்லை)

பௌதிகம் (Physics)			ரூ.	பை
*195.	எந்திரவியல் சிறப்புப் பாடம் (Book I) ...	ஆர். நாகராசன் ...	6	25
*196.	,, II ...	,, ...	5	50
*197.	வெப்பவியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	கே. நாச்சிமுத்து ...	5	25
*198.	செய்முறை பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I) ...	டி. கமலக்கண்ணன், ஆர். கிருட்டிணசாமி ...	4	50
*199.	,, II ..	,, ...	3	25
*200.	பௌதிகம்—துணைப்பாடம்-I (Book I) ...	பி. தங்கராஜன் ...	4	00
*201.	,, (Book II) ...	,, ...	3	00
*202.	செய்முறை பௌதிகம்—துணைப்பாடம் ...	கே. பாசுகரன், இரா. செயராம், ..	4	50
*203.	மின்னியல் காந்தவியல்—சிறப்புப் பாடம் (Book I) ..	டி. ஏ. கருப்பண்ணன்	4	75
*204.	,, II ...	,, ...	4	50
*205.	,, III ...	,, ...	4	25
*206.	ஒளியியல்—சிறப்புப் பாடம் ...	டாக்டர் வி. சண்முகசுந்தரம், டாக்டர் ஆர். சபேசன் ...	7	75
*207.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம் (பகுதி 2) (முதல் புத்தகம்) ...	கா. வே. சுப்பிரமணியன் ...	6	00
*208.	பௌதிகம்-துணைப்பாடம் (பகுதி 2) (இரண்டாம் புத்தகம்) ...	,, ...	4	50
*209.	பொது பௌதிகம்-சிறப்புப் பாடம் ...	கே. பி. கந்தசாமி ...	4	50

*210.	இன்றைய பௌதிகம்—சிறப்புப் பாடம்	... எம். ஏ. தங்கராஜ்	...	6	75
*211.	ஒலி நூல்-சிறப்புப் பாடம்	... டி. முருகையன்	...	5	00

வேதியியல்

*212.	செய்முறை கனிம வேதியியல்-துணைப்பாடம்	... டாக்டர் முத்துக்குமாரசுவாமி	...	2	00
*213.	செய்முறைக் கனிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	... டி. இராமலிங்கம்	...	2	25
*214.	பௌதிக வேதியியல்— சிறப்புப் பாடம் (Book I)	... டி. சக்திவேலு	...	4	00
*215.	,, ,, II	... ,,	...	3	50
*216	கனிம வேதியியல்—துணைப்பாடம்	... சி. ஏ. பத்மநாபன்	...	6	50
*217.	கனிம வேதியியல் - சிறப்புப் பாடம் (Book I)	... பி. டி. முனியப்பா	...	4	00
*218.	,, ,, II	... ,,	...	4	25
*219.	பொது பௌதிக வேதியியல் -துணைப்பாடம்	... ஆர். துளசிதாஸ்	...	4	75
*220.	அறிமுறை வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்—I	... ஓ. ஆர். சூரியநாராயணன்	...	4	50
*221.	,, II	... ,,	...	3	75
*222	செய்முறைக் கரிம வேதியியல்—சிறப்புப் பாடம்	... என். ஆறுமுகம்	...	3	50
*223.	அங்கக வேதியியல்-துணைப்பாடம்	... பிஎல். இராமசாமி	...	5	00
*224.	அங்கக வேதியியல்–I	... எம். ஆட்கொண்டான்	...	3	00
*225.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-I (2-ம் புத்தகம்)	... கி. கண்ணபிரான்	...	4	75
*226.	,, (3-ம் புத்தகம்)	... ,,	...	3	25
*227.	கரிம வேதியியல்-பகுதி-II (1-ம் புத்தகம்)	... ,,	...	5	75
*228.	,, (2-ம் புத்தகம்)	... ,,	...	6	00

*மூல நூல் (Original Book)

கணிதம் (Mathematics)

			ரூ.	பை
*229.	இயற்கணிதம்—சிறப்புப் பாடம் (Book I)	டி. கோவிந்தராஜன் கே. முத்துசாமி	4	25
*230.	,, II	,,	3	25
*231.	தொகுமுறை வரைகணிதம்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*232.	எண்சார் கணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	எம். எம். இராமசாமி	5	50
*233.	திரிகோண கணிதம்—சிறப்புப்பாடம்	வி. அரங்கநாதன்	3	25
*234.	கணிதம்—துணைப்பாடம்	ஆர். அனுமந்தராவ்	6	00
*235.	நிலையியல்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜகோபாலன்	5	00
*236.	முப்பரிமாணப் பகுமுறை வடிவ கணிதம் —சிறப்புப்பாடம்	கே. சிவசுப்பிரமணியன்	2	75
*237.	வெக்டர் கணிதமும் அதன் பயன்பாடுகளும் —சிறப்புப்பாடம்	ஆர். மகாதேவன்	2	00
*238.	கணிதம்-துணைப்பாடம்-பகுதி 2	ஆர். அய்யாசாமி	5	75
*239.	வானியல்—சிறப்புப்பாடம்—முதல் புத்தகம்	தி. கோவிந்தராசன், கொ. முத்துசாமி	5	50
*240.	வானியல்— ,, —இரண்டாம் புத்தகம்	,,	3	75
*241.	இயக்கவியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆர். மகாதேவன், கே. சிவசுப்பிரமணியம், பி. ஆர். சுப்பிரமணியம்	7	00

புள்ளியியல் (Statistics)

*242.	புள்ளியியல்—துணைப்பாடம்	எஸ். கருப்பையா	3	50

விலங்கியல் (Zoology)

No.	Title	Author	Rs.	P.
*243.	முதுகெலும்பற்றவை I—சிறப்புப்பாடம்	ஆர். முருகேசன்	6	00
*244.	,, II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி எஸ். கே. வள்ளி	6	00
*245.	முதுகுநாணுள்ளவை—I—சிறப்புப்பாடம் (Book I)	திருமதி ராணி கந்தசுவாமி	5	00
*246.	,, II (Book II)	,,	9	75
*247.	முதுகு தண்டுள்ளவை—II—சிறப்புப்பாடம்	திருமதி கிருஷ்ணவேணி நாராயணன்	11	75
*248.	முதுகெலும்பிகளது கருவியல்—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	9	00
*249.	முதுகெலும்பற்றவை—துணைப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	9	00
*250.	முதுகுநாணுள்ளவை—துணைப்பாடம்	வி. சேது	6	00
*251.	செல்லியல்—சிறப்புப்பாடம்	என். இராமலிங்கம்	5	50
*252.	மரபியல்—சிறப்புப்பாடம்	பெ. மா. அண்ணாமலை	5	25
*253.	சூழ்நிலையியல்—உடற்செயலியல் சிறப்புப் பாடம்—I	டி. ஆர். கிருஷ்ணன்	4	75
*254.	சூழ்நிலையியல்—உடற்செயலியல் ,, —II	,,	6	50
*255.	பரிணாமம்	எஸ். ஆப்ரகாம்	6	25

தாவரவியல் (Botany)

No.	Title	Author	Rs.	P.
*256.	தாவர வெளி உள்ளமைப்பியல்களும் வகைப்பாட்டியலும்—சிறப்புப்பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	11	00
*257.	தாவரப் புற அமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. பாலச்சந்திரகணேசன்	9	25
*258.	தாவர உள்ளமைப்பியல்—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் ஏ. கோவிந்தராஜுலு	7	25

*மூல நூல் (Original Book)

தாவரவியல்—(தொடர்ச்சி)

			ரூ.	பை
*259.	தாவரங்களின் வாழ்க்கை—சிறப்புப் பாடம்	எஸ். சுந்தரம்	9	50
*260.	தாவரவியல்—துணைப்பாடம்	பா. இராசாராம்	4	50
*261.	தாவரச் சூழ்நிலையியல், மரபியல், உயிர்மருஉ இயல், இயங்கியல்—துணைப்பாடம்	கே. பெரியசாமி	4	00
*262.	சூழ்நிலையியல், பரிணாமம், மரபியல்—சிறப்புப் பாடம்	கே. ஆர். பாலசந்திரகணேசன்	8	25
*263.	டெரிடோஃபைட்டா, ஜிம்னோஸ்பெர்மே—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	10	25
*264.	தாலோபைட்டா (பாசிகளும் பூஞ்சைகளும்)—சிறப்புப் பாடம்	டாக்டர் வே. சோ. சுந்தரலிங்கம்	9	00
*265.	தாவர வகைப்பாட்டியல்—சிறப்புப் பாடம்	ஆ. சம்பத்குமார்	10	50
*266.	பிரையோஃபைட்டா—சிறப்புப் பாடம்	கே. இராஜசேகரன்	6	00

*மூல நூல் (Original Book)